ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN ĐẶNG TUYÊN

MỘT VÀI KHÍA CẠNH CỦA TOÁN TỬ P-LAPLACE TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN ĐẶNG TUYÊN

MỘT VÀI KHÍA CẠNH CỦA TOÁN TỬ P-LAPLACE TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9460101.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng
PGS. TS. Phạm Đức Thoan

Hà Nội, 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận án là mới, đã được công bố trên các tạp chí Toán học có uy tín trên thế giới. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được công bố trong bất kì công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Đặng Tuyên

LỜI CẢM ƠN

Luận án của tôi được hoàn thành dưới sự hướng dẫn hết sức tận tình của PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng và PGS. TS. Phạm Đức Thoan. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các thầy. Các thầy luôn chỉ bảo, sẻ chia, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Đại học Quốc gia Hà Nội), Phòng Sau đại học và Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Cơ-Tin học đã giúp đỡ cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi dành cho tôi. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô trong Bộ môn Giải tích đã giảng dạy, giúp đỡ và góp ý cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Bên cạnh đó, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến tập đoàn Vingroup, Quỹ Đổi mới sáng tạo VINIF đã tài trợ học bổng cho tôi với thông tin tài trợ như sau: Nguyễn Đặng Tuyên được tài trợ bởi Tập đoàn Vingroup – Công ty CP và hỗ trợ bởi Chương trình học bổng thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn, mã số VINIF.2021.TS.078.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn từ tận đáy lòng đến đồng nghiệp, gia đình và người thân đã luôn đồng hành, khích lệ, động viên tôi và chia sẻ các khó khăn để tôi có thể hoàn thành được luận án này.

Tác giả

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, chúng tôi thống nhất một số kí hiệu như sau:

- (M^n, g): Đa tạp Riemann n-chiều M với metric Riemann g.
- T_xM: Không gian tiếp xúc của M tại điểm $x \in M$.
- $\Omega^\ell(M)$: Tập hợp các ℓ-dạng vi phân trơn trên M.
- $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \left\{\ell\text{-dạng vi phân } p\text{-điều hòa } \omega \text{ sao cho } \int_M |\omega|^Q < \infty\right\}$.
- $C^\infty(M)$: Tập hợp các hàm trơn trên M.
- $C_0^\infty(M)$: Tập hợp các hàm trơn có giá compact trong M.
- $B_x(r)$: Hình cầu trắc địa tâm tại điểm x, bán kính r.
- $|B_x(r)|$: Thể tích của hình cầu trắc địa $B_x(r)$.

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Giải tích hình học là một lí thuyết toán học đẹp đẽ liên kết hình học, giải tích và tô pô, trong đó giải tích là công cụ chính để nghiên cứu hình học và tô pô của các đa tạp Riemann. Chúng ta đã biết rằng nhóm đồng điều kì dị trên một đa tạp trơn, compact có thể được nghiên cứu thông qua lí thuyết phân tích Hodge và nhóm đối đồng điều De Rham trên các dạng vi phân. Đây là một kết quả nổi tiếng trong tô pô và giải tích. Hơn nữa, định lí tách cổ điển của Cheeger – Gromoll khẳng định rằng nếu một đa tạp đầy đủ M với độ cong Ricci không âm có chứa một đường thẳng trắc địa thì nó đẳng cự với một hình trụ $N \times \mathbb{R}$ trong đó N là một đa tạp Riemann với độ cong Ricci không âm. Sau này, P. Li và J. Wang [52, 54] đã tổng quát hóa kết quả của Cheeger-Gromoll lên các đa tạp với độ cong Ricci bị chặn dưới. Kết quả của Li-Wang (thực chất là mở rộng lí thuyết của Cheeger-Gromoll và X. D. Wang [84]) nói rằng nếu giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace đạt giá trị cực đại thì các đa tạp này hoặc liên thông tại vô hạn hoặc có tính chất tách. Do đó, ta có thể sử dụng lí thuyết tuyến tính của toán tử Laplace, đặc biệt lí thuyết dạng vi phân điều hòa để tìm hiểu các tính chất hình học và tô pô của các đa tạp.

Một trong các bài toán thú vị của hình học và tô pô là đi tìm các điều kiện đủ trên một đa tạp đầy đủ sao cho ta có thể thu được các định lí triệt tiêu cho các dạng vi phân điều hòa hoặc p-điều hòa. Đây là một vấn đề thú vị bởi vì như chúng ta biết, khi M là đa tạp compact thì không gian các ℓ-dạng vi phân điều hòa đẳng cấu với nhóm đối đồng điều De Rham thứ ℓ của nó. Mặc dù, điều này không đúng cho trường hợp M không compact nhưng việc nghiên cứu các ℓ-dạng vi phân L^2 điều hòa là quan trọng (xem [17]). Với giả sử độ cong Ricci bị chặn dưới, P. Li [49] đã chứng minh rằng trên đa tạp compact, không gian các ℓ-dạng vi phân điều hòa có hữu hạn chiều. P. Li và J. Wang [52] đã chứng minh được một định lí triệt tiêu của các 1-dạng vi phân L^2 điều hòa nếu độ cong Ricci bị chặn dưới bởi số hạng chứa số chiều và giá trị riêng thứ nhất như sau.

Định lí 0.0.1 ([52]). *Cho M là một đa tạp Riemann đầy đủ. Giả sử $\lambda_1(M) > 0$ và $\mathrm{Ric} \geq -\frac{n\lambda_1(M)}{n-1} + \varepsilon$, với một hằng số $\varepsilon > 0$ nào đó. Khi đó, $H^{2,1}(L^2(M)) = \{0\}$.*

Gần đây, H. Lin xét đa tạp Riemann với độ cong vô hướng không âm và thu được trong bài báo [58] một định lí triệt tiêu nếu M thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng như sau.

Định lí 0.0.2 ([58]). *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) + a_\ell |E|(x) \leq C_\ell \rho(x)$$

với hằng số $0 < C_\ell < \frac{2\left(1+\frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}\right)}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ $(2 \leq \ell \leq n-2, \ell \neq \frac{n}{2})$ và $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^2 = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^2(M)) = \{0\}$.

Nhắc lại rằng, E và W lần lượt là tensor Ricci với vết bằng không và tensor độ cong Weyl của M. Để thấy rõ các kết quả theo hướng nghiên cứu này, chúng ta có thể tham khảo thêm trong các bài báo [9, 15, 51, 54, 55, 68, 76] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Lí thuyết về các dạng vi phân L^2 điều hòa đã được phát triển nhiều. Một vấn đề rất tự nhiên là tìm các kết quả tương tự cho không gian các dạng vi phân L^Q p-điều hòa. Đối với 1-dạng vi phân p-điều hòa, khi một bất đẳng thức Poincaré có trọng đúng trên M, Chang-Chen-Wei [18] thu được một vài định lí triệt tiêu cho các hàm p-điều hòa với năng lượng L^q hữu hạn, trong đó $p > 1$ và $q \in \mathbb{R}^+$. Hơn nữa, X. Zhang [96] thu được một định lí triệt tiêu nếu M có độ cong Ricci không âm như sau.

Định lí 0.0.3 ([96]). *Nếu M là một đa tạp không compact, đầy đủ, với độ cong Ricci không âm thì không có 1-dạng vi phân p-điều hòa khác không trong $L^q(M)$, trong đó $0 < q < \infty$ và $p > 1$.*

Xuất phát từ kết quả này, Chang-Guo-Sung [19] tổng quát hóa kết quả của X. Zhang và thu được tính compact cho bất kì tập hợp bị chặn của các 1-dạng vi phân p-điều hòa. Y. B. Han, Q. Y. Zhang và M. H. Liang [41] thu được một vài định lí về tính hữu hạn và tính triệt tiêu dưới giả thiết về độ cong vô hướng và độ cong Ricci. Bên cạnh đó, Sung-Wang [80] sử dụng lí thuyết về các hàm p-điều hòa để chỉ ra vài tính chất của đa tạp Riemann với p-phổ lớn nhất. Năm 2017, N. T. Dũng [28] chứng minh định lí triệt tiêu cho các ℓ-dạng vi phân L^p p-điều hòa như sau.

Định lí 0.0.4 ([28]). *Giả sử M là đa tạp Riemann thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng dương ρ. Nếu toán tử độ cong Weitzenböck $K_\ell > -a\rho$ và $a < \frac{4(p-1)}{p^2}$ thì mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ($2 \leq \ell \leq n-2$) có chuẩn L^p hữu hạn trên M đều triệt tiêu.*

Chúng ta có thể xem thêm các kết quả trong các bài báo [34, 40, 41, 60, 77, 78, 83] và tài liệu tham khảo trong đó để thấy thêm sự phát triển của hướng nghiên cứu này.

Từ các kết quả trên, chúng tôi đặt ra bài toán là xây dựng các định lí triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann.

Mặt khác, như ta đã biết phương trình

$$\Delta_f u + h(u) = 0$$

có chứa nhiều lớp phương trình quan trọng trong phương trình vi phân và vật lí. Ví dụ, khi hàm $h(u) = bu + u^p$ với hằng số $b < 0$ và $p > 1$ và $f \equiv \text{const}$ thì phương trình trên trở thành một phương trình loại Yamabe như sau

$$\Delta u + bu + u^p = 0.$$

Bidaut-Véron và Véron [8] nghiên cứu phương trình này trên đa tạp compact. Với một vài điều kiện thêm vào về tensor Ricci, số chiều và các miền của b, p, họ chỉ ra rằng phương trình loại Yamabe ở trên chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đa tạp Riemann M là đầy đủ, không compact, Brandolini-Rigoli-Setti [12] xét phương trình loại Yamabe

$$\Delta u + a(x)u + A(x)u^p = 0,$$

ở đây $a(x)$ và $A(x)$ là các hàm liên tục trên M và $p > 1$. Khi $A(x) < 0$ tại mọi nơi, họ chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm bị chặn dương thỏa mãn các điều kiện khả tích nào đó. Để xem thêm các kết quả về bài toán Yamabe, ta có thể xem thêm trong [63] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Tổng quát hơn của phương trình Yamabe là phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng, phương trình xuất hiện từ phương trình ràng buộc Halmiton cho hệ Einstein-trường vô hướng trong thuyết tương đối rộng (xem [23, 27, 67] và các tài liệu tham khảo trong đó). Khi đa tạp M có số chiều $n \geqslant 3$, phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng có dạng như sau

$$\Delta u + bu + Au^p + Bu^{-q} = 0, \tag{0.1}$$

ở đó b, A, B là các hàm trơn, $p = (n+2)/(n-2)$ và $q = -(3n-2)/(n-2)$. Trong khi đó, trên đa tạp 2 chiều, phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng có dạng như sau (xem [24, 67])

$$\Delta u + Ae^{2u} + Be^{-2u} + D = 0.$$

Mặt khác, L. Ma và J. C. Wei [62] nghiên cứu tính ổn định và nghiệm bội của phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng trên đa tạp Riemann compact. Nếu $n \geq 5$, họ chứng minh rằng có ít nhất hai nghiệm dương hoặc có một nghiệm dương duy nhất dựa theo tính chất cưỡng của một dạng toàn phương xác định bởi nghiệm nhỏ nhất thu được bằng phương pháp đơn điệu. Y. Li và X. R. Zhu [56] cũng nghiên cứu phương trình Lichnerowicz dạng đơn giản và thu được ước lượng gradient tương ứng. Một kết quả dạng Liouville cho nghiệm dương của một phương trình tổng quát hơn phương trình (0.1) được cho ở trong [67, Mục 8]. Gần đây, L. Zhao [100, 101] và Song-Zhao [79] xét phương trình Lichnerowicz tổng quát

$$\Delta_f u + bu + Au^p + Bu^{-q} = 0,$$

ở đó b, A, B là các hàm trơn trên không gian độ đo metric trơn $(M, g, e^{-f}dv)$ và $p \geq 0, q \geq 0$. Họ thu được một vài ước lượng gradient cho nghiệm dương u và chứng minh một vài bất đẳng thức dạng Harnack. Gần đây, trong [32, 93], các tác giả xét phương trình nhiệt tổng quát $u_t = \Delta_f u + bu + Au^p + Bu^{-q}$ và thu được các ước lượng gradient dạng Souplet-Zhang và tính chất Liouville cho nghiệm dương với các điều kiện độ tăng nào đó.

Mặt khác, với trường hợp tổng quát, phương trình Lichnerowicz p-Laplace được nghiên cứu trong [27] khi đa tạp là compact và sau đó M. Benalili và Y. Maliki [5] mở rộng các kết quả tương ứng cho đa tạp Riemann đầy đủ. Sự tồn tại nghiệm của phương trình p-Laplace tổng quát $\Delta_p v + h(v) = 0$ được nghiên cứu bởi M. Troyanov và P. Tolksdorf trong [81, 82]. Họ chứng minh rằng nếu h bị chặn thì tồn tại một nghiệm thuộc lớp $\mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$. Sau đó, trong [39], V. Gol'dshtein và M. Troyanov sử dụng không gian đối đồng điều $H^n_{comp,q}$ để nghiên cứu tính p-parabolic của đa tạp đầy đủ và tính chất giải được của phương trình p-Laplace. Đối với phương trình thuần nhất, B. Kotschwar và L. Ni [47] thiết lập được một ước lượng gradient địa phương cho các hàm p-điều hòa với giả thiết độ cong nhát cắt bị chặn dưới và họ kết luận rằng mọi hàm p-điều hòa dương phải là hằng nếu đa tạp không compact, đầy đủ, có độ cong nhát cắt không âm. Họ cũng sử dụng nó để nghiên cứu dòng độ cong trung bình ngược. Sau đó, X. D. Wang và L. Zhang [90] nghiên cứu các hàm p-điều hòa, ước lượng gradient địa phương và bất đẳng thức Harnack với hằng số chỉ phụ thuộc vào cận dưới của độ cong Ricci, chiều của đa tạp và bán kính của quả cầu mà hàm số xác định. Họ cũng thu được một kết quả như sau: Nếu u là một hàm p-điều hòa dương bị chặn trên hoặc dưới trên một đa tạp Riemann đầy đủ với tensor Ricci không âm thì u là hằng số. Khác với các phương pháp thường dùng, phương pháp của họ dựa trên một ứng dụng của phép lặp Moser.

Gần đây, S. C. Chang, J. T. Chen và S. W. Wei [18] thu được một định lí Liouville cho hàm p-điều hòa yếu với p-năng lượng hữu hạn trên một đa tạp không compact đầy đủ M mà thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng và điều kiện về độ cong. Sau đó, sử dụng một phương pháp khác, N. T. Dũng và các tác giả đã cải tiến định lí Liouville được đưa ra bởi S. C. Chang và các tác giả trong [33, 34]. Năm 2019, L. Zhao [99] xét câu hỏi tương tự trên không gian độ đo metric trơn và thu được kết quả sau.

Định lí 0.0.5 ([99]). *Cho $(M^n, g, d\mu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact n chiều mà trên đó bất đẳng thức Poincaré $\int_M \rho\psi^2 \leq \int_M |\nabla\psi|^2$*

đúng và độ cong Bakry-Émery thỏa mãn $\mathrm{Ric}_f^m(M) \geq -a\rho$, *ở đây* $\psi \in W_0^{1,2}(M), 0 < a < min\{\frac{4(p-1)}{p^2}, \frac{4}{p} - \frac{4}{m-1}\frac{(p-1)^2}{p^2}\}$ *và* $\rho(x)$ *là một hàm dương trên* $(M^n, g, d\mu)$. *Giả sử rằng* v *là một nghiệm dương của phương trình* p*-Lichnerowicz có trọng*

$$\Delta_{p,f} v + cv^\sigma = 0,$$

ở đây $c \leq 0, m > n, 0 \leq \sigma \leq p-1$ *là các số thực. Nếu* $\int_M |\nabla v|^p$ *hữu hạn và* $1 < p < \frac{m-1+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2}$ *thì* v *là một hằng số.*

Từ đó, chúng tôi đặt ra bài toán là nghiên cứu định lí Liouville cho phương trình elliptic không tuyến tính trên đa tạp Riemann có trọng.

Như chúng ta biết ước lượng gradient là một công cụ quan trọng trong giải tích hình học và được sử dụng để thu được các định lí Liouville và các bất đẳng thức Harnack cho nghiệm dương của các phương trình không tuyến tính trên đa tạp Riemann. Ước lượng gradient Cheng-Yau địa phương khẳng định nếu M là một đa tạp Riemann đầy đủ n chiều với $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)\kappa$ với $\kappa \geq 0$ nào đó và $u : B_o(R) \subset M \to \mathbb{R}$ điều hòa và dương thì tồn tại một hằng số c_n chỉ phụ thuộc vào n sao cho

$$\sup_{B_o(R/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq c_n \frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}. \tag{0.2}$$

Sau đó, ước lượng Cheng-Yau được mở rộng và tổng quát bởi nhiều nhà toán học. Trong bài báo [29], N. T. Dũng và N. D. Đạt xét phương trình (0.3) với $F(u) = \lambda u^{p-1}$ và nghiên cứu ước lượng gradient cho p-hàm riêng có trọng của toán tử $\Delta_{p,f}$. Nếu $F(u) = cu^\sigma$ thì phương trình

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0 \tag{0.3}$$

là một phương trình loại Lichnerowicz. Trong bài báo [102], các tác giả chứng minh các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình này và từ đó, họ đưa ra một tính chất Liouville và bất đẳng thức Harnack tương ứng. Sau đó, L. F. Wang [86] ước lượng giá trị riêng của toán tử p-Laplace có trọng. Y. Wang, J. Yang và W. Chen [91] thiết lập các ước lượng gradient và các công thức entropy cho phương trình p-nhiệt có trọng. Sau đó, N. T. Dũng và C. J. Sung [34] nghiên cứu một vài tính chất Liouville cho ℓ-dạng vi phân p-điều hòa có trọng trên không gian độ đo metric trơn với các bất đẳng thức Poincaré và Sobolev. Gần đây, trong bài báo [10], với các điều kiện hình học trên không gian độ đo metric trơn cho trước, các tác giả chỉ ra định lí Liouville đúng cho các hàm p-điều hòa năng lượng hữu hạn và tựa cực tiểu hóa. Để tìm hiểu thêm về các kết quả của chủ đề này, chúng ta có thể xem thêm trong các bài báo [10, 44, 47, 65, 66, 73, 90, 91] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong hướng nghiên cứu khác, các ước lượng gradient được tổng quát hóa lên đa tạp với điều kiện độ cong Ricci tích phân. Trước khi phát biểu các kết quả, chúng ta hãy đưa ra một số kí hiệu. Với mỗi $x \in M$, kí hiệu $\rho(x)$ là giá trị riêng nhỏ nhất của tensor Ricci Bakry-Émery m chiều $\mathrm{Ric}_f^m : T_xM \to T_xM$ và với số cố định bất kì K, đặt

$$(\mathrm{Ric}_f^m)_-^K(x) = ((n-1)K - \rho(x))_+ = \max\{0, (n-1)K - \rho(x)\}.$$

Đặt

$$\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,r} = \sup_{x \in M} \left(\int_{B_x(r)} \left((\mathrm{Ric}_f^m)_-^K \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dễ dàng thấy $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,r} = 0$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{Ric}_f^m \geq (n-1)K$. Chúng ta cũng thường xuyên làm việc với lượng độ cong bất biến tỉ lệ sau đây (với $K = 0$)

$$k(x,q,r) = r^2 \left(\fint_{B_x(r)} \rho_-^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad k(q,r) = \sup_{x \in M} k(x,q,r),$$

ở đây kí hiệu

$$\fint_{B_x(r)} (\cdot) := \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} (\cdot)$$

biểu diễn tích phân trung bình trên $B_x(r)$ và $|B_x(r)|$ là thể tích của $B_x(r)$. Chúng ta cũng lưu ý rằng điều kiện độ cong tích phân bị chặn là tự nhiên và yếu hơn nhiều so với điều kiện độ cong Ricci bị chặn dưới. Nó có liên quan gần gũi đến các mặt của tô pô và hình học của đa tạp, chúng ta có thể xem trong [3, 38, 71, 72] và các tài liệu tham khảo trong đó. Gần đây, điều kiện độ cong Ricci tích phân được sử dụng để thu được các ước lượng gradient cho nghiệm dương của phương trình nhiệt. Đặc biệt, trong [75], C. Rose nghiên cứu chặn trên của nhân nhiệt trên đa tạp Riemann với tích phân độ cong Ricci bị chặn đều địa phương. Trong bài báo [69], X. R. Olivé sử dụng độ cong Ricci tích phân để chỉ ra ước lượng gradient Li-Yau trên một đa tạp Riemann compact với điều kiện biên Neumann.

Chúng ta cũng lưu ý rằng các ước lượng gradient Li-Yau cho phương trình nhiệt tuyến tính trên đa tạp không compact đầy đủ được chỉ ra bởi Q. S. Zhang và M. Zhu [97, 98]. Sau đó, các kết quả này được tổng quát bởi W. Wang [88] cho phương trình nhiệt không tuyến tính. Hơn nữa, xuất phát từ phương pháp trong [29], W. Wang thu được một ước lượng gradient dạng Hamilton cho một phương trình nhiệt không tuyến tính trong [87].

Do vậy, chúng tôi đặt ra bài toán nghiên cứu các ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann.

Từ những lí do như trên, chúng tôi lựa chọn đề tài "***Một vài khía cạnh của toán tử*** p***-Laplace trên các đa tạp Riemann***" để tập trung nghiên cứu vào các định lí triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa, cũng như định lí Liouville cho phương trình elliptic không tuyến tính và nghiên cứu ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích đầu tiên của luận án là khảo sát các tính chất triệt tiêu của không gian các dạng vi phân p-điều hòa với năng lượng L^Q hữu hạn. Cụ thể, luận án sẽ đưa ra các điều kiện đủ về độ cong của đa tạp Riemann M sao cho các dạng vi phân p-điều hòa trên M là triệt tiêu.

Tiếp theo, luận án nghiên cứu định lí Liouville cho phương trình elliptic trên không gian độ đo metric trơn. Cụ thể, luận án sẽ đưa ra định lí Liouville cho phương trình sau

$$\Delta_{p,f}v + h(v) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$.

Cuối cùng, luận án đưa ra ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Cụ thể, luận án đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f}u + F(u) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, trong đó F là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Từ đó, luận án đưa ra các định lí Liouville và các ước lượng gradient địa phương cho một số phương trình đặc biệt.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann, định lí Liouville và ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng.

4. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi dùng các phương pháp của giải tích hình học, phương trình đạo hàm riêng, giải tích phức và giải tích hàm để giải quyết các bài toán đặt ra trong luận án. Đặc biệt, chúng tôi sử dụng các bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và kĩ thuật Bochner để ước lượng một vài đại lượng giải tích liên quan đến các dạng vi phân p-điều hòa. Hơn nữa, một vài kết quả trong hình học vi phân cũng rất hữu dụng trong các khảo sát. Cụ thể, chúng tôi sẽ sử dụng các kĩ thuật sau:

- Sử dụng kĩ thuật Bochner để ước lượng các đạo hàm bậc cao của các hàm p-điều hòa có trọng, các dạng vi phân p-điều hòa có trọng theo các đạo hàm cấp thấp hơn. Sau đó, chúng tôi chuyển các điều kiện hình học liên quan đến độ cong Ricci, Bakry-Émery thành các điều kiện giải tích và đại số để sử dụng công cụ giải tích ước lượng, giải quyết bài toán.
- Sử dụng bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và các ước lượng độ cong đã biết để nghiên cứu tính chất của các dạng vi phân p-điều hòa.
- Nghiên cứu và chứng minh các ước lượng độ cong mới, sử dụng phương pháp lặp Moser để chứng minh các ước lượng địa phương và toàn cục cho nghiệm dương của phương trình p-Laplace có trọng.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án đưa ra được những kết quả mới về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann, đưa ra định lí Liouville cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann và đưa ra ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann.

Luận án cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án bao gồm bốn chương. Chương 1 trình bày tổng quan các kết quả đã có trước đó và giới thiệu các kết quả đạt được của luận án. Ba chương còn lại trình bày chi tiết cho các kết quả mới của luận án.

Chương 1. Tổng quan.

Chương 2. Tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann.

Chương 3. Định lí Liouville cho phương trình elliptic trên các đa tạp Riemann.

Chương 4. Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann.

Luận án được viết dựa trên 04 bài báo đã được đăng.

Chương 1

TỔNG QUAN

Như đã trình bày ở trên, trước hết luận án sẽ đưa ra các điều kiện đủ để các dạng vi phân p-điều hòa là triệt tiêu. Tiếp theo, luận án nghiên cứu định lí Liouville cho phương trình elliptic trên các không gian độ đo metric trơn. Cuối cùng, luận án đưa ra các ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann.

Trong chương này, chúng tôi sẽ tóm tắt một vài kết quả trước đó và các kết quả mới mà chúng tôi thu được ở từng bài toán.

1.1 Tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann

Trước hết, chúng tôi nhắc lại khái niệm dạng vi phân điều hòa và dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann. Cho d là toán tử vi phân ngoài trên một đa tạp Riemann n chiều M, toán tử đối ngẫu d^* (tác động lên ℓ-dạng vi phân) của nó được cho bởi công thức $d^* = (-1)^{n\ell+n+1} \star d \star$, ở đó $\star$ kí hiệu cho toán tử sao Hodge. Toán tử Hodge-Laplace-Beltrami Δ tác động trên không gian các ℓ-dạng vi phân trơn $\Omega^\ell(M)$ được cho bởi $\Delta = -(d^*d + dd^*)$.

Định nghĩa 1.1.1. *Một ℓ-dạng vi phân trơn ω trên M được gọi là điều hòa nếu $\Delta\omega = 0$.*

Một kết quả nổi tiếng đã chỉ ra rằng trên đa tạp compact M, một dạng vi phân ω là điều hòa khi và chỉ khi $d\omega = 0$ và $d^*\omega = 0$. Do đó, với bất kì $p > 1$, một cách tự nhiên, ta có định nghĩa dạng vi phân p-điều hòa như sau.

Định nghĩa 1.1.2. *Một ℓ-dạng vi phân $\omega \in \Omega^\ell(M)$ được gọi là ℓ-dạng vi phân p-điều hòa nếu*

$$\begin{cases} d\omega & = 0 \\ d^*(|\omega|^{p-2}\omega) & = 0. \end{cases}$$

Chúng ta lưu ý, khi $p = 2$ và M compact, một ℓ-dạng vi phân p-điều hòa cũng là một ℓ-dạng vi phân điều hòa. Khi u là một hàm p-điều hòa thì du là một dạng vi phân p-điều hòa.

Trong bài báo [59], tác giả đã sử dụng tính compact của đa tạp để chứng minh định lí sau.

Định lí 1.1.1 ([59]). *Cho (M^n, g), $n \geq 4$, là một đa tạp Riemann compact, được định hướng, với độ cong vô hướng $R > 0$. Giả sử độ cong vô hướng R và độ cong concircular Z thỏa mãn*

$$|Z|^2 \leq \frac{n^2 - n - 2}{n^2 - n} R^2,$$

tại mọi điểm thuộc M và bất đẳng thức trên chặt tại một điểm trong M. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân điều hòa trên M đều triệt tiêu (với $2 \leq \ell \leq n-2$).

Nhắc lại rằng độ cong concircular $Z = (Z_{ijkm})$ của g được cho bởi

$$Z_{ijkm} = R_{ijkm} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}),$$

trong đó R_{ijkm} là các thành phần của độ cong Riemann của M. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Có một kết quả tương tự như trên cho dạng vi phân p-điều hòa trong trường hợp M là đa tạp không compact hay không? Chúng tôi đưa ra được một kết quả tổng quát hơn cho dạng vi phân p-điều hòa trong trường hợp M là đa tạp không compact mà không kèm theo điều kiện độ cong vô hướng dương như sau.

Định lí 1.1.2. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann được định hướng, không compact, đầy đủ, thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử*

$$\sqrt{\frac{n^2 - n - 2}{n^2 - n}}|Z| - \frac{n^2 - n - 2}{n^2 - n} R \leq C\rho(x) \tag{1.1}$$

với hằng số $C = C(p,n,\ell,Q) \in \left(0, \frac{8(Q-1)+4B_p(p-1)^2}{Q^2}\right)$ *($2 \le \ell \le n-2, Q \ge p \ge 2$). Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn* $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ *đều có chuẩn là hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$, với*

$$H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \left\{ \ell\text{-dạng vi phân } p\text{-điều hòa } \omega \text{ sao cho } \int_M |\omega|^Q < \infty \right\}.$$

Ở đây, R kí hiệu độ cong vô hướng của M và hằng số B_p xuất hiện trong bất đẳng thức Kato ở Bổ đề 2.2.2.

Nhắc lại rằng: Ta nói đa tạp Riemann M thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng $\rho(x)$ nếu

$$\int_M \rho(x)\psi^2(x) \le \int_M |\nabla\psi|^2(x) \tag{1.2}$$

đúng cho mọi hàm trơn $\psi \in C_0^\infty(M)$ có giá compact trong M, ở đó $\rho(x)$ được giả sử là một hàm không âm khác tầm thường trên M.

Nhận xét 1.1.3. *Chúng ta nhận thấy điều kiện về độ cong trong định lí trên là tổng quát hơn điều kiện về độ cong trong kết quả trước đó của H. Lin trong bài báo [59].*

Nhận xét 1.1.4. *Trong định lí trên nếu thay $p = 2$ thì chúng ta sẽ có ngay một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa.*

Nhận xét 1.1.5. *Nếu giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M) > 0$ thì bằng cách thay hàm $\rho(x) = \lambda_1(M)$, chúng ta thu được một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa.*

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm về đa tạp phẳng bảo giác địa phương. Cho hai đa tạp Riemann (M, g) và $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, một vi phôi $\varphi : M \to \widetilde{M}$ được gọi là một vi phôi bảo giác (hoặc một phép biến đổi bảo giác) nếu nó kéo lùi $\widetilde{g}$ thành một metric bảo giác với g, tức là $\varphi^*\widetilde{g} = fg$ với hàm dương nào đó $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$. Hai đa tạp Riemann được gọi là tương đương bảo giác nếu có một vi phôi bảo giác giữa chúng.

Định nghĩa 1.1.6. *Đa tạp Riemann (M, g) được gọi là phẳng bảo giác địa phương nếu mọi điểm của M có một lân cận mà tương đương bảo giác với một tập con mở của $(\mathbb{R}^n, \overline{g})$, ở đó $\overline{g}$ là metric Euclid trên $\mathbb{R}^n$.*

Khi đa tạp M là phẳng bảo giác địa phương, có nhiều kết quả triệt tiêu cho các ℓ-dạng vi phân điều hòa và ℓ-dạng vi phân p-điều hòa (chẳng hạn, xem [57] và các tài liệu tham khảo trong đó). Cụ thể, H. Lin [57] đã chứng minh các định lí triệt tiêu và hữu hạn cho các 1-dạng vi phân L^2 điều hòa trên một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương nếu nó thỏa mãn điều kiện tích phân của tensor Ricci với vết bằng không. Chúng tôi nêu lại một kết quả như sau.

Định lí 1.1.3 ([57]). *Cho (M^n, g) $(n \geq 3)$ là một đa tạp Riemann đầy đủ, phẳng bảo giác địa phương và đơn liên. Giả sử độ cong vô hướng R và tensor Ricci với vết bằng không E thỏa mãn*

$$\int_M |R|^{\frac{n}{2}} < \infty \text{ và } \int_M |E|^{\frac{n}{2}} < \infty.$$

Khi đó, $\dim H^{2,1}(L^2(M)) < \infty$.

Ở đây, chúng tôi nhắc lại: Tensor Ricci với vết bằng không $E = (E_{ij})$ của g được xác định như sau

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij},$$

trong đó R_{ij} kí hiệu cho độ cong Ricci trên M. Kết quả tiếp theo của luận án là một định lí triệt tiêu trên đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương với điều kiện độ cong tại từng điểm.

Định lí 1.1.4. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương, không compact, đầy đủ, với độ cong vô hướng $R > 0$. Giả sử M thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử rằng*

$$\frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2 R^2\right) \leq C\rho(x) \tag{1.3}$$

với hằng số $C = C(p, n, \ell, Q) \in \left(0, \frac{4}{Q^2}\left[Q - 1 + B_p(p-1)^2\right]\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, \ell \neq \frac{n}{2}, Q \geq p \geq 2)$ và $a = \frac{(n-1)(n-2\ell)^2}{2(n-2)^2}$, $b = \frac{n-2}{(n-1)|n-2\ell|}\sqrt{\frac{\ell(n-\ell)}{n}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.7. *Trong định lí trên nếu thay $p = 2$ thì chúng ta sẽ có ngay một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa.*

Nhận xét 1.1.8. *Bằng cách thay $\rho(x)$ trong định lí trên bằng giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M) > 0$, chúng ta thu được một hệ quả về tính triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa.*

Chúng ta để ý trong bài báo [58], tác giả chứng minh một kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân điều hòa trên một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ với điều kiện của tensor Ricci với vết bằng không E và tensor độ cong Weyl W như sau.

Định lí 1.1.5 ([58]). *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) + a_\ell |E|(x) \leq C_\ell \rho(x) \tag{1.4}$$

với hằng số $0 < C_\ell < \frac{2\left(1+\frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}\right)}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ $(2 \leq \ell \leq n-2, \ell \neq \frac{n}{2})$ và $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^2 = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^2(M)) = \{0\}$.

Một câu hỏi tự nhiên là: Kết quả này còn đúng cho ℓ-dạng vi phân p-điều hòa hay không? Định lí tiếp theo sẽ cho chúng ta câu trả lời.

Định lí 1.1.6. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) + a_\ell |E|(x) \leq C_\ell \rho(x) \tag{1.5}$$

với hằng số $0 < C_\ell < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{\ell(\ell-1)p^2}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ ở đó $2 \leq \ell \leq n-2$, $\ell \neq \frac{n}{2}$, $p \geq 2$ và $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^p(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.9. *Định lí này sẽ quay về kết quả của H. Lin ở trên khi $p = 2$.*

Trong trường hợp $n = 2m$ và $\ell = \frac{n}{2} = m$, chúng tôi thu được một kết quả tương tự như sau.

Định lí 1.1.7. *Cho $(M^{2m}, g)(m \geq 2)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) \leq C_m \rho(x)$$

với hằng số

$$0 < C_m < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{m(m-1)p^2}\sqrt{\frac{m(2m-1)}{(2m+1)(m-1)}} \text{ và } p \geq 2.$$

Khi đó, mọi m-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ là m-dạng vi phân song song. Đặc biệt, $H^{p,m}(L^p(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.10. *Khi $p = 2$, định lí trên cho ta một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa, giống như trong bài báo [58].*

Để giới thiệu kết quả tiếp theo, chúng tôi nhắc lại khái niệm về độ cong ℓ-không âm và khái niệm đa tạp có tensor độ cong thuần túy như sau.

Định nghĩa 1.1.11. *Một đa tạp Riemann M được gọi là có độ cong ℓ-không âm nếu với mỗi $x \in M$ và với bất kì $(\ell+1)$ véc tơ trực chuẩn $\{e_0, e_1, ..., e_\ell\} \subset T_xM$, ta có*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \langle R(e_0, e_i)e_i, e_0\rangle \geq 0.$$

Định nghĩa 1.1.12. *Đa tạp Riemann M^n được gọi là có tensor độ cong thuần túy nếu với mọi $x \in M$, tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{e_1, ..., e_n\}$ của T_xM sao cho $\langle R(e_i, e_j)e_k, e_\ell\rangle = 0$ khi tập hợp $\{i, j, k, \ell\}$ có chứa nhiều hơn hai phần tử (xem [7]).*

Khi đó, bằng cách thay thế điều kiện độ cong bởi điều kiện độ cong ℓ-không âm, trong bài báo [58], H. Lin thu được một định lí như sau.

Định lí 1.1.8 ([58]). *Cho $(M^n, g)(n \geq 3)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với tensor độ cong thuần túy và độ cong ℓ-không âm, $1 \leq \ell \leq n-1$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ $\left(q > 1 - \frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}\right)$ đều có chuẩn hằng. Nếu giả sử thêm $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ thì ω triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^q(M)) = \{0\}$.*

Tổng quát kết quả trên cho dạng vi phân p-điều hòa, chúng tôi thu được một kết quả như sau.

Định lí 1.1.9. *Cho $(M^n, g)(n \geq 3)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với tensor độ cong thuần túy và độ cong ℓ-không âm, $1 \leq \ell \leq n-1$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ $(q \geq p \geq 2)$ đều có chuẩn hằng. Nếu giả sử thêm $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ thì ω triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^q(M)) = \{0\}$.*

Nhận xét 1.1.13. *Khi $p = 2$ thì từ định lí trên chúng ta thu được một kết quả về tính triệt tiêu của dạng vi phân điều hòa tương tự như kết quả trên của H. Lin.*

Ngoài ra, khi M có độ cong vô hướng không âm và bất biến Yamabe $\mathcal{Q}(M, g)$ dương, H. Lin [58] đã chứng minh một kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân L^2 điều hòa. Trước hết, chúng tôi nhắc lại về bất biến Yamabe $\mathcal{Q}(M, g)$.

Định nghĩa 1.1.14. *Cho đa tạp Riemann $(M^n, g), n \geq 3$, bất biến Yamabe của M được định nghĩa bởi*

$$\mathcal{Q}(M, g) = \inf_{0 \neq u \in C_0^\infty(M)} \frac{\int\limits_M \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R u^2\right)}{\left(\int\limits_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Nếu $\mathcal{Q}(M, g) > 0$ thì ta có bất đẳng thức sau

$$\mathcal{Q}(M, g) \left(\int\limits_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int\limits_M \left(|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R u^2\right) \tag{1.6}$$

với bất kì $u \in C_0^\infty(M)$. Khi M là không compact và đầy đủ, theo Bổ đề 4.2 [11], điều kiện $\int_M |R|^{\frac{n}{2}} < \infty$ dẫn đến bất đẳng thức Sobolev dạng Euclid như sau

$$\left(\int\limits_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int\limits_M |\nabla f|^2 \tag{1.7}$$

với mọi $f \in C_0^\infty(M)$ và hằng số $C > 0$ nào đó. Khi đó, kết quả của H. Lin trong bài báo [58] được phát biểu như sau.

Định lí 1.1.10 ([58]). *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M, g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell \mathcal{Q}(M, g)$$

ở đó

$$c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}\min\left\{1 + \frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\} (2 \leq \ell \leq n-2)$$

và

$$a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}.$$

Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^2 = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^2(M)) = \{0\}$.

Từ đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu ℓ-dạng vi phân L^Q p-điều hòa và thu được kết quả mở rộng như sau.

Định lí 1.1.11. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M, g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell \mathcal{Q}(M, g) \tag{1.8}$$

ở đó $c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}\min\left\{\frac{4Q-4+4B_p(p-1)^2}{Q^2}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\} (2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq p \geq 2)$ và $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.15. *Khi $Q = p = 2$ thì định lí này quay về kết quả trên của H. Lin.*

1.2 Tính triệt tiêu của 1-dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức

Trong phần này, chúng tôi xét trường hợp đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức. Trước hết, chúng tôi nhắc lại về đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức.

Cho M là một đa tạp Riemann n chiều và $\widetilde{M}$ là một đa tạp Kähler với số chiều $2(n+k)$, $k \geq 0$. Gọi $\widetilde{J}$ là cấu trúc hầu phức của $\widetilde{M}$ và gọi g (tương ứng $\widetilde{g}$) là metric Riemann của M (tương ứng $\widetilde{M}$). Ta nói M là một đa tạp con thực hoàn toàn của $\widetilde{M}$ nếu M có một phép nhúng đẳng cự vào $\widetilde{M}$ sao cho với mọi x, $\widetilde{J}(T_xM) \subset \nu_x$, ở đó T_xM kí hiệu không gian tiếp xúc của M tại x và ν_x là không gian pháp tuyến tại x.

Định nghĩa 1.2.1. *Một đa tạp Kähler với độ cong nhát cắt chỉnh hình hằng được gọi là một dạng không gian phức.*

Gọi $\widetilde{M}_{n+p}(c)$ là một dạng không gian phức $(n+p)$ chiều với độ cong nhát cắt chỉnh hình hằng c, với $c \leq 0$. Như chúng ta biết, nếu $c = -1$ thì độ cong nhát cắt của $\widetilde{M}$ nằm trong đoạn $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$ và nếu $c = 0$ thì $\widetilde{M}$ là phẳng. Tuy nhiên, nếu M là một không gian xạ ảnh phức với metric Fubini-Study thì M có độ cong nhát cắt song chỉnh hình hằng dương mà được chuẩn hóa bằng 4. Trong trường hợp này, độ cong nhát cắt của M nằm giữa $\frac{1}{4}$ và 1. Chúng ta có thể xem thêm [20] để thảo luận thêm về đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức.

Trong bài báo [25], D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn thu được một kết quả triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa trên các đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn của các dạng không gian phức như sau.

Định lí 1.2.1 ([25])**.** *Cho M là một đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1, n \geq 5,\ 1 \leq k < \frac{n-2}{2}$ *và*

$$\|A\|_n < \sqrt{\frac{(2k-1)(n-2k-2)}{k^2(n-1)C}};$$

(ii) $c = 0, k \geq 1$ *và* $\|A\|_n < \sqrt{\dfrac{2k(n-1)-(n-2)}{(n-1)k^2C}}$

thì mọi 1-dạng vi phân L^{2k} điều hòa trên M đều triệt tiêu. Ở đây, A là dạng cơ bản thứ hai của M và $\|A\|_n = \left(\int_M |A|^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Xuất phát từ kết quả trên, luận án nghiên cứu một lớp các 1-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp con cực tiểu hoặc không cực tiểu thực hoàn toàn được nhúng trong một dạng không gian phức. Khi đa tạp con là cực tiểu, chúng tôi thu được kết quả như sau.

Định lí 1.2.2. *Cho M là một đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều ($n \geq 3$) được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau đúng*

(i) $c = -1$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C} - \frac{Q^2}{(n-1)C}}$;

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C}}$

thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trên M đều triệt tiêu, với $Q \geq p \geq 2$. Ở đây, C kí hiệu hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số B_p trong Bổ đề 2.5.2 và $\|A\|_n = \left(\int_M |A|^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Nhận xét 1.2.2. *Chúng ta nhận thấy định lí trên là tổng quát của kết quả trong bài báo [25] của D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn.*

Lưu ý rằng trong trường hợp đa tạp con không cực tiểu, chúng ta cần thêm một giả thiết về cận dưới của $\lambda_1(M)$. Thực tế, ta có kết quả như sau.

Định lí 1.2.3. *Cho M là một đa tạp con không cực tiểu thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1$, $\lambda_1(M) > \frac{(n-1)Q^2}{16[Q-1+B_p(p-1)^2]}$ *và*

$$\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s} - \frac{(n-1)Q^2}{16(n+1)C_s\lambda_1(M)}};$$

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \min\left\{\frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha C}}\right\}$, *ở đó $\alpha > 1, C$ là hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số B_p trong Bổ đề 2.5.2 và* $C_s := \frac{\alpha C}{\alpha - 1}$

thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trên M đều triệt tiêu, với $Q \geq p \geq 2$.

Nhận xét 1.2.3. *Khi $p = 2$, chúng ta thu được một định lí triệt tiêu cho 1-dạng vi phân điều hòa trên đa tạp con không cực tiểu. Chúng tôi cũng nhấn mạnh là kết quả này không được phát biểu trong bài báo [25].*

Mặt khác, trong bài báo [22] (Định lí 3.3), Choi-Seo xét một đa tạp con thực hoàn toàn không compact, đầy đủ trong một không gian xạ ảnh phức thỏa mãn chuẩn L^n của dạng cơ bản thứ hai vết không là đủ nhỏ. Họ thu được một định lí triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa như sau.

Định lí 1.2.4 ([22]). *Cho M là một đa tạp con thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều ($n \geq 3$) trong $\mathbb{C}P^m$. Gọi Φ là dạng cơ bản thứ hai vết không, xác định bởi $\Phi = A - Hg$, ở đó A, H và g lần lượt là dạng cơ bản thứ hai, véc tơ độ cong trung bình và metric cảm sinh trên M. Khi đó, với*

$$\frac{n^2}{n-1}\left(1-\sqrt{1-\frac{4(n-1)}{3n^2}}\right) < k < \frac{n^2}{n-1}\left(1+\sqrt{1-\frac{4(n-1)}{3n^2}}\right),$$

tồn tại một số dương δ sao cho nếu $\|\Phi\|_n < \delta$ thì mọi 1-dạng vi phân L^{2k} điều hòa trên M đều triệt tiêu.

Từ đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu 1-dạng vi phân p-điều hòa và thu được một kết quả tổng quát hơn như sau.

Định lí 1.2.5. *Cho M là một đa tạp con thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều ($n \geq 3$) trong $\mathbb{C}P^m$. Gọi Φ là dạng cơ bản thứ hai vết không, xác định bởi $\Phi = A - Hg$, ở đó A, H và g lần lượt là dạng cơ bản thứ hai, véc tơ độ cong trung bình và metric cảm sinh trên M. Khi đó, với mọi $p \geq 2$, tồn tại Q, δ phụ thuộc vào p, n sao cho nếu $\|\Phi\|_n < \delta$ thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trên M đều triệt tiêu.*

Nhận xét 1.2.4. *Khi $p = 2$, chúng ta có ngay một kết quả triệt tiêu cho 1-dạng vi phân điều hòa. Hơn nữa, hệ quả này có thể coi là một cải tiến của Định lí 3.3 trong bài báo [22], đặc biệt khi $n \leq 7$.*

1.3 Định lí Liouville cho phương trình elliptic trên các đa tạp Riemann

Trước hết, chúng tôi nhắc lại một vài khái niệm liên quan đến không gian độ đo metric trơn. Một không gian độ đo metric trơn (còn gọi là đa tạp có trọng) là một bộ ba $(M, g, d\mu)$, trong đó (M, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ, n chiều và $d\mu := e^{-f}d\nu$ với f là một hàm trơn giá trị thực trên M và $d\nu$ là dạng thể tích tương ứng với metric g. Kí hiệu ∇ và Hess lần lượt là gradient và toán tử Hessian. Độ cong m-Bakry-Émery Ricci trên một không gian độ đo metric trơn được xác định bởi

$$\mathrm{Ric}_f^m := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f - \frac{df \otimes df}{m-n} (n < m \leq \infty).$$

Đặc biệt, khi $m = \infty, \mathrm{Ric}_f^\infty := \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f$ là độ cong Bakry-Émery cổ điển, độ cong được đưa ra bởi Bakry-Émery [2] trong quá trình nghiên cứu về các quá trình khuếch tán và sau đó nó được nghiên cứu rộng rãi trong lí thuyết dòng Ricci. Trường hợp $m = n$ chỉ xác định khi f là hàm hằng.

Trên M, ta xét toán tử vi phân Δ_f, toán tử này được gọi là toán tử Laplace có trọng với hàm trọng f và được cho bởi

$$\Delta_f \cdot := \Delta \cdot - \langle \nabla f, \ \nabla \cdot \rangle .$$

Toán tử này đối xứng đối với độ đo $e^{-f} d\nu$, nghĩa là,

$$\int\limits_M \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle \, e^{-f} d\nu = - \int\limits_M (\Delta_f \varphi) \psi e^{-f} d\nu,$$

với mọi $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$. Tổng quát, toán tử p-Laplace có trọng được định nghĩa bởi

$$\Delta_{p,f} u := e^f \mathrm{div}(e^{-f} |\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

với $u \in W_{loc}^{1,p}(M)$. Thực tế, ta có một định nghĩa tổng quát hơn như sau.

Định nghĩa 1.3.1 ([4, 40, 83])**.** *Cho $p > 1, \ell \in \mathbb{N}$, một ℓ-dạng vi phân trơn ω được gọi là một ℓ-dạng vi phân p-điều hòa nếu*

$$\begin{cases} d\omega & = 0 \\ d_f^*(|\omega|^{p-2}\omega) & = 0 \end{cases}$$

theo nghĩa suy rộng. Ở đây d_f^* là toán tử đối ngẫu của toán tử vi phân tương ứng với dạng thể tích có trọng $e^{-f} d\nu$.

Khi đó, một hàm u là p-điều hòa có trọng nếu $u \in W_{loc}^{1,p}(M, e^{-f} dv)$ và $\omega = du$ là một 1-dạng vi phân p-điều hòa, tức là $d_f^*(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$. Hơn nữa, toán tử p-Laplace có trọng có thể viết lại dưới dạng

$$\Delta_{p,f} \cdot = -d_f^*(|\nabla \cdot |^{p-2} \nabla \cdot).$$

Năm 2019, L. Zhao [99] thu được một định lí Liouville trên không gian độ đo metric trơn như sau.

Định lí 1.3.1 ([99])**.** *Cho $(M^n, g, d\mu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact, n chiều mà trên đó bất đẳng thức Poincaré $\int_M \rho \psi^2 \leq \int_M |\nabla \psi|^2$*

đúng và độ cong Bakry-Émery thỏa mãn $\mathrm{Ric}_f^m(M) \geq -a\rho$, *ở đây* $\psi \in W_0^{1,2}(M), 0 < a < min\left\{\frac{4(p-1)}{p^2}, \frac{4}{p} - \frac{4}{m-1}\frac{(p-1)^2}{p^2}\right\}$ *và* $\rho(x)$ *là một hàm dương trên* $(M^n, g, d\mu)$. *Giả sử rằng* v *là một nghiệm dương của phương trình p-Lichnerowicz có trọng*

$$\Delta_{p,f} v + c v^{\sigma} = 0,$$

ở đây $c \leq 0, m > n, 0 \leq \sigma \leq p-1$ *là các số thực. Nếu* $\int_M |\nabla v|^p$ *hữu hạn và* $1 < p < \frac{m-1+\sqrt{(m-1)(m+3)}}{2}$ *thì* v *là một hằng số.*

Từ kết quả ở trên và tính chất Liouville thu được bởi N. T. Dũng - N. N. Khanh - Q. A. Ngô trong [32], chúng tôi xét phương trình sau

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$. Nhắc lại, nếu $h(v) \equiv 0$ thì v được gọi là p-điều hòa có trọng. Bằng cách sử dụng phương pháp trong bài báo [33, 34], chúng tôi thu được kết quả mới như sau.

Định lí 1.3.2. *Cho* $(M^n, g, e^{-f} d\nu)(n \geq 2)$ *là một không gian độ đo metric trơn không compact và đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, *ở đây* ρ *thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng*

$$\int \rho \varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla \varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(M).$$

Với $p \geq 1$ *và* $\alpha \in (0,1)$, *giả sử* $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ *là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0,$$

ở đó $h(v)$ *là một hàm khả vi và thỏa mãn* $h'(v) \leq 0$. *Nếu hằng số* a *thỏa mãn*

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và nếu $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ *với*

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì hàm v *là hằng số.*

Nhận xét 1.3.2. *Để ý rằng nếu* $h(v) = cv^\sigma$ *ở đó* $c \le 0, \sigma \ge 0$ *thì phương trình ở trên trở thành* $\Delta_{p,f} v + cv^\sigma = 0$*. Đây là phương trình đã được nghiên cứu bởi L. Zhao. Hơn nữa,* $h'(v) \le 0$*. Đặt* $\beta = \frac{p}{2}$*, chúng tôi nhấn mạnh rằng trong trường hợp này, kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của L. Zhao. Thật vậy, từ* $\mathrm{Ric}_f^m \ge -a\rho$ *kéo theo* $\mathrm{Ric}_f \ge -a\rho$*, điều kiện về độ cong của chúng tôi là yếu hơn so với giả thiết của L. Zhao. Miền của* a *trong kết quả của chúng tôi rộng hơn miền của* a *trong giả thiết của L. Zhao. Hơn nữa, chúng tôi không cần điều khiển giá trị của* p *như trong bài báo của L. Zhao.*

1.4 Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann

Trong bài báo [102], L. Zhao và D. Yang xét phương trình p-Laplace Lichnerowicz

$$\Delta_{p,f} u + cu^\sigma = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, với $c \ge 0, p > 1, \sigma \le p - 1$ và thu được một ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương như sau.

Định lí 1.4.1 ([102])**.** *Cho* $(M, g, d\mu)$ *là một không gian độ đo metric trơn với* $\mathrm{Ric}_f^m \ge -(m-1)K$*, với* K *là một hằng số dương. Giả sử* u *là một nghiệm dương của phương trình* p*-Laplace Lichnerowicz ở trên, trên quả cầu* $B_o(R) \subset M$*, với điều kiện* $\sigma \le p - 1, p > 1$*. Khi đó, tồn tại một hằng số* $C_{p,m}$ *sao cho*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le C_{p,m} \frac{(1 + \sqrt{K}R)^{\frac{3}{4}}}{R}.$$

Từ đó, các tác giả thu được một tính chất Liouville và một bất đẳng thức Harnack tương ứng.

Mặt khác, S. B. Hou, trong bài báo [45], xét nghiệm dương bị chặn của phương trình Allen-Cahn

$$\Delta u + (1 - u^2)u = 0$$

trên đa tạp Riemann đầy đủ, không compact. Từ đó, tác giả thu được các ước lượng gradient cho các nghiệm này. Như là một hệ quả, S. H. Hou thu được một định lí Liouville trên các đa tạp với độ cong Ricci không âm.

Từ các kết quả ở trên, luận án đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0 \tag{1.9}$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact. Trong phần này, chúng ta giả sử F là một hàm khả vi, $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Đặt $h(v) = (p-1)^{p-1} e^{-v} F(e^{\frac{v}{p-1}})$, chúng ta giả sử thêm $h'(v) \leq a := a(p)$ với hằng số nào đó $a \geq 0$, ở đó $a = 0$ nếu $p \neq 2$. Chúng ta nói *một bất đẳng thức Sobolev có trọng* đúng trên M nếu tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, C_3, chỉ phụ thuộc vào m, sao cho với mọi quả cầu $B_o(R) \subset M$, mọi hàm $\phi \in C_0^\infty(B_o(R))$ ta có

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} e^{-f} d\mu \right)^{\frac{m-2}{m}} \leq C_1 e^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} \int_{B_o(R)} (R^2 |\nabla \phi|^2 + \phi^2) e^{-f} d\mu,$$

ở đó V là thể tích của quả cầu trắc địa $B_o(R)$.

Từ đó, chúng tôi thu được một ước lượng gradient như sau.

Định lí 1.4.2. *Cho $(M, g, e^{-f} d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn mà trên đó có bất đẳng thức Sobolev có trọng. Giả sử u là một nghiệm dương của phương trình (1.9), trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$ và $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0, h'(v) \leq a = a(p)$ với hằng số nào đó $a \geq 0$, ở đó $a = a(p) = 0$ nếu $p \neq 2$. Với bất kì $\eta > 0, q > \frac{n}{2}$, tồn tại $b > 0$ sao cho nếu $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{1}{bR^2}$ và $k(q,1) \leq \frac{1}{b}$ thì tồn tại một hằng số $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và V sao cho*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1+\sqrt{K}R}{R} + \eta,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$. Hơn nữa, nếu $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} = 0$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1+\sqrt{K}R}{R},$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$ và $C_{p,m}$ chỉ phụ thuộc vào p và m.

Nhận xét 1.4.1. *Bằng cách áp dụng hàm $F(u)$ cho trường hợp cụ thể, ta thu được các ước lượng gradient cho các phương trình được xét trong các bài báo [45] và [102]. Ngoài ra, nếu thay $F(u) = cu(1-u)$, với $c > 0$, chúng ta thu được một ước lượng gradient mới cho phương trình Fisher-KPP. Hơn nữa, từ định lí trên, chúng ta còn thu thêm được ước lượng gradient cho phương trình*

$$\Delta_f u + au \log u = 0, a \geq 0.$$

(Đây là phương trình xuất phát từ gradient Ricci solitons)

Chương 2

TÍNH TRIỆT TIÊU CỦA CÁC DẠNG VI PHÂN P-ĐIỀU HÒA TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương này sẽ trình bày chi tiết các kết quả mới về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann. Các kết quả này được viết dựa trên các bài báo [3] và [4] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**. Trước hết, chúng tôi nhắc lại công thức Weitzenböck.

2.1 Công thức Weitzenböck

Cho (M^n, g) là một đa tạp Riemann n chiều với metric Riemann g và cho R_{ijkm}; W_{ijkm} tương ứng là kí hiệu các thành phần của độ cong Riemann và độ cong Weyl của M trong trường frame trực chuẩn địa phương $\{e_1, ..., e_n\}$. Khi đó, chúng ta có công thức phân tích độ cong như sau

$$\begin{aligned} R_{ijkm} = W_{ijkm} &+ \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta_{jm} - R_{im}\delta_{jk} + R_{jm}\delta_{ik} - R_{jk}\delta_{im}) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}), \end{aligned}$$

ở đó, R_{ik} và R lần lượt kí hiệu tensor Ricci và độ cong vô hướng của M.

Gọi $\{\theta^1, ..., \theta^n\}$ là co-frame đối ngẫu của frame $\{e_1, ..., e_n\}$. Cho ω là một ℓ-dạng vi phân trên M. Khi đó, ω có thể được biểu diễn trong co-frame đối ngẫu địa phương như sau

$$\omega = \alpha_{i_1 \dots i_\ell}\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_\ell},$$

ở đó các chỉ số lặp lại được co rút và lấy tổng. Ta có công thức Weitzenböck như sau

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle + F(\omega), \tag{2.1}$$

ở đó,

$$F(\omega) = \left\langle \sum_{j,k=1}^{n} \theta^k \wedge i(e_j)R(e_k, e_j)\omega, \omega \right\rangle$$
$$= R_{ij}\langle i(e_i)\omega, i(e_j)\omega\rangle - \frac{1}{2}R_{ijkm}\langle i(e_j \wedge e_i)\omega, i(e_m \wedge e_k)\omega\rangle$$
$$= \ell R_{ij}\alpha^{ii_2\dots i_\ell}\alpha^{j}{}_{i_2\dots i_\ell} - \frac{\ell(\ell-1)}{2}R_{ijkm}\alpha^{iji_3\dots i_\ell}\alpha^{km}{}_{i_3\dots i_\ell}. \tag{2.2}$$

Giống như trong bài báo [59], chúng ta sử dụng tensor độ cong concircular $Z = (Z_{ijkm})$ của g, với

$$Z_{ijkm} = R_{ijkm} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}).$$

Sử dụng công thức (2.1), ta có

$$\Delta|\omega|^2 = \frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\star\omega|^2$$
$$= |\nabla\omega|^2 + |\nabla\star\omega|^2 + F(\omega) + F(\star\omega) + \langle\Delta\omega, \omega\rangle + \langle\Delta\star\omega, \star\omega\rangle.$$

Bằng một vài tính toán, H. Lin chứng minh trong [59] ước lượng sau cho số hạng độ cong

$$F(\omega) + F(\star\omega) \geq \left(\frac{n^2-n-2}{n^2-n}R - \sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z|\right)|\omega|^2.$$

Điều này kéo theo

$$\Delta|\omega|^2 \geq |\nabla\omega|^2 + |\nabla\star\omega|^2 + \left(\frac{n^2-n-2}{n^2-n}R - \sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z|\right)|\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle + \langle\Delta\star\omega, \star\omega\rangle. \tag{2.3}$$

Mặt khác, trong bài báo [58], tác giả thu được

$$F(\omega) \geq -\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|W||\omega|^2 - \frac{\ell|n-2\ell|}{n-2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}|E||\omega|^2 + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}R|\omega|^2$$

ở đó $E = (E_{ij})$ kí hiệu tensor Ricci với vết bằng không của g, tức là,

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}.$$

Do đó, bởi đẳng thức (2.1), chúng ta thu được bất đẳng thức dạng Bochner như sau

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 \geq |\nabla\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|W||\omega|^2$$
$$- \frac{\ell|n-2\ell|}{n-2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}|E||\omega|^2 + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}R|\omega|^2. \tag{2.4}$$

Hơn nữa, giả sử (M^n, g) là một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương. Khi đó, trong trường frame trực chuẩn địa phương cho trước, tensor độ cong của M có thể viết dạng

$$R_{ijkm} = \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta_{jm} - R_{im}\delta_{jk} + R_{jm}\delta_{ik} - R_{jk}\delta_{im}) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}).$$

Thay công thức trên vào (2.2), chúng ta thu được

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{\ell(n-2\ell)}{n-2} R_{ij}\alpha^{ii_2\ldots i_\ell}\alpha^j_{i_2\ldots, i_\ell} + \frac{\ell(\ell-1)}{(n-1)(n-2)} R|\omega|^2 \\ &= \frac{\ell(n-2\ell)}{n-2} E_{ij}\alpha^{ii_2\ldots i_\ell}\alpha^j_{i_2\ldots, i_\ell} + \frac{\ell(n-\ell)}{n(n-1)} R|\omega|^2. \end{aligned}$$

Giả sử $2\ell \neq n$ và độ cong vô hướng $R > 0$. Khi đó, như trong bài báo [59], chúng ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 &\geq |\nabla\omega|^2 + \frac{a}{R}\left[(|E| - bR)^2 - (|E|^2 - b^2R^2)\right]|\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle \\ &\geq |\nabla\omega|^2 - \frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2R^2\right)|\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle \end{aligned} \tag{2.5}$$

ở đó

$$a = \frac{(n-1)(n-2\ell)^2}{2(n-2)^2}; b = \frac{n-2}{(n-1)|n-2\ell|}\sqrt{\frac{\ell(n-\ell)}{n}}.$$

2.2 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với bất đẳng thức Poincaré có trọng

Trong phần này, chúng tôi xét một đa tạp Riemann với bất đẳng thức Poincaré có trọng. Chúng tôi nhắc lại rằng trong bài báo [59], H. Lin sử dụng độ cong concircular Z và chứng minh một kết quả cho các ℓ-dạng vi phân điều hòa trên đa tạp Riemann compact nếu độ cong vô hướng $R > 0$ và $|Z|^2 \leq \frac{n^2-n-2}{n^2-n}R^2$. Kết quả đầu tiên trong chương này là đưa ra một định lí tổng quát hơn cho các ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp không compact mà không có điều kiện độ cong vô hướng dương.

Định lí 2.2.1 (Định lí 1.1.2). *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann được định hướng, không compact, đầy đủ, thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử*

$$\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z| - \frac{n^2-n-2}{n^2-n}R \leq C\rho(x) \tag{2.6}$$

với hằng số $C = C(p, n, \ell, Q) \in \left(0, \frac{8(Q-1)+4B_p(p-1)^2}{Q^2}\right)$ $(2 \le \ell \le n-2, Q \ge p \ge 2)$. *Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn* $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ *đều có chuẩn là hằng. Đặc biệt,* $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$, *với*

$$H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \left\{\ell\text{-dạng vi phân } p\text{-điều hòa } \omega \text{ sao cho } \int_M |\omega|^Q < \infty\right\}.$$

Ở đây, R kí hiệu độ cong vô hướng của M và hằng số B_p xuất hiện trong bất đẳng thức Kato ở Bổ đề 2.2.2.

Để chứng minh các kết quả trong phần này chúng ta nhắc lại một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.2 (Bất đẳng thức dạng Kato - xem [35]). *Với $p \ge 2, \ell \ge 1$, cho ω là một ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên một đa tạp Riemann đầy đủ, n chiều M. Khi đó, ta có*

$$|\nabla(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \ge (B_p + 1)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2,$$

$$\text{ở đó } B_p = \begin{cases} \frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}, & \text{nếu } p = 2 \\ \frac{1}{(p-1)^2}.\min\{1, \frac{(p-1)^2}{n-1}\}, & \text{nếu } p > 2 \text{ và } \ell = 1 \\ 0, & \text{nếu } p > 2 \text{ và } 1 < \ell \le n-1 \end{cases}.$$

Bổ đề 2.2.3 (Xem [34]). *Với bất kì ℓ-dạng vi phân đóng ω và $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(M)$, ta có*

$$|d(\varphi\omega)| = |d\varphi \wedge \omega| \le |d\varphi|.|\omega|.$$

Chứng minh Định lí 2.2.1. Sử dụng bất đẳng thức dạng Kato và tính chất sau đây $|\star|\omega|^{p-2}\omega| = ||\omega|^{p-2}\omega| = |\omega|^{p-1}$, chúng ta thu được

$$|\nabla(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \ge (B_p + 1)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2$$

và

$$|\nabla(\star|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \ge |\nabla|\star(|\omega|^{p-2}\omega)||^2 = |\nabla|\omega|^{p-1}|^2.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức (2.3) cho dạng vi phân $|\omega|^{p-2}\omega$ cùng với giả thiết về độ cong dẫn đến

$$\begin{aligned}\Delta|(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \geq& (B_p+2)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2 + \left(\frac{n^2-n-2}{n^2-n}R - \sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z|\right)|\omega|^{2(p-1)}\\ &- \langle (d^*d+dd^*)(|\omega|^{p-2}\omega), |\omega|^{p-2}\omega\rangle - \langle (d^*d+dd^*)(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star|\omega|^{p-2}\omega\rangle\\ \geq& (B_p+2)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2 - C\rho|\omega|^{2(p-1)}\\ &- \langle (d^*d+dd^*)(|\omega|^{p-2}\omega), |\omega|^{p-2}\omega\rangle - \langle (d^*d+dd^*)(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star|\omega|^{p-2}\omega\rangle.\end{aligned}$$

Bằng một tính toán đơn giản, điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}2|\omega|^{p-1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq& B_p|\nabla|\omega|^{p-1}|^2 - C\rho|\omega|^{2(p-1)}\\ &- \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), |\omega|^{p-2}\omega\rangle - \langle (d^*d+dd^*)(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star|\omega|^{p-2}\omega\rangle.\end{aligned}$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $|\omega|^{p-2}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}2|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq& B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - C\rho|\omega|^p\\ &- \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle - \langle (d^*d+dd^*)(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star\omega\rangle.\end{aligned}$$

Cố định một điểm $x_0 \in M$ và gọi $r(x)$ là khoảng cách trắc địa trên M từ x_0 đến x. Chọn $\varphi \in C_0^\infty(M)$ thỏa mãn: với $r > 0$, ta có

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } r(x) \leq r\\ \in [0;1] \text{ và } |\nabla\varphi|(x) \leq \dfrac{2}{r}, & \text{nếu } r < r(x) \leq 2r\\ 0, & \text{nếu } r(x) > 2r. \end{cases} \tag{2.7}$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $\varphi^2|\omega|^q, (q \geq 0)$ và lấy tích phân trên M, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}&2\int_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1}\\ \geq& B_p(p-1)^2\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 - C\int_M \rho\varphi^2|\omega|^{p+q}\\ &- \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle - \int_M \langle (d^*d+dd^*)(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star\varphi^2|\omega|^q\omega\rangle.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Chúng ta ước lượng (2.8) thông qua bốn bất đẳng thức sau. Đầu tiên, đối với số hạng bên vế trái, tích phân từng phần dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1}\\
&= -2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle - (p-1)(q+1)\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\le 2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| - (p-1)(q+1)\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2.
\end{aligned}$$

Do bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) đúng trên M, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_M \rho\varphi^2|\omega|^{p+q}\\
&\le \int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + (p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\right]\\
&\le \int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + (p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||\right].
\end{aligned}$$

Mặt khác Bổ đề 2.2.3 và bất đẳng thức Schwarz kéo theo

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle\\
\le&\int_M |d|\omega|^{p-2}|\cdot|\omega|\cdot|d(\varphi^2|\omega|^q)|\cdot|\omega|\\
=&\int_M |\nabla|\omega|^{p-2}|\cdot|\omega|\cdot|\nabla(\varphi^2|\omega|^q)|\cdot|\omega|\\
\le&2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + (p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2.
\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, sử dụng định nghĩa của d^*, Bổ đề 2.2.3 và bất đẳng thức Schwarz, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle dd^*(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle\\
=&\int_M \langle d^*(\star|\omega|^{p-2}\omega), d^*(\star\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle\\
\le&\int_M |d^*(\star|\omega|^{p-2}\omega)||d^*(\star\varphi^2|\omega|^q\omega)|\\
=&\int_M |d(|\omega|^{p-2}\omega)||d(\varphi^2|\omega|^q\omega)|\\
\le&2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + (p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2.
\end{aligned}$$

Để ý rằng ω là p-điều hòa, chúng ta có $d^*(|\omega|^{p-2}\omega) = 0$ hay một cách tương đương, theo định nghĩa của d^*, $d(\star|\omega|^{p-2}\omega) = 0$. Hệ quả là,

$$\langle d^* d(\star|\omega|^{p-2}\omega), \star(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle = 0.$$

Do đó, kết hợp bốn bất đẳng thức ở trên và sử dụng (2.8), ta có

$$\begin{aligned}
&-\left[2(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2 - \frac{C(p+q)^2}{4} - 2(p-2)q\right]\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
\geq& -C\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + [-8p+12-C(p+q)]\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| \\
\geq& -C\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 - \varepsilon\left|4p-6+\frac{C(p+q)}{2}\right|\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
&-\frac{1}{\varepsilon}\left|4p-6+\frac{C(p+q)}{2}\right|\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2
\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$. Vì vậy, với $Q := p+q$, chúng ta có

$$A\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 \leq D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2, \tag{2.9}$$

ở đó

$$\begin{aligned}
A :=& 2(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2 - \frac{C(p+q)^2}{4} - 2(p-2)q - \varepsilon\left|4p-6+\frac{C(p+q)}{2}\right| \\
=& 2Q - 2 + B_p(p-1)^2 - \frac{CQ^2}{4} - \varepsilon\left|4p-6+\frac{CQ}{2}\right|
\end{aligned}$$

và

$$D := C + \frac{1}{\varepsilon}\left|4p-6+\frac{C(p+q)}{2}\right| = C + \frac{1}{\varepsilon}\left|4p-6+\frac{CQ}{2}\right|.$$

Hơn nữa, từ $C \in \left(0, \frac{8(Q-1)+4B_p(p-1)^2}{Q^2}\right)$, chúng ta có

$$2Q - 2 + B_p(p-1)^2 - \frac{CQ^2}{4} > 0.$$

Do đó, chúng ta có thể chọn ϵ đủ bé sao cho $A > 0$. Từ (2.9) dẫn đến

$$\begin{aligned}
A\int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^{Q-2}.|\nabla|\omega||^2 &\leq A\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}.|\nabla|\omega||^2 \\
&\leq D\int\limits_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2 \leq D\frac{4}{r^2}\int\limits_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^Q.
\end{aligned}$$

Cho $r \to \infty$, chúng ta có $|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 = 0$ trên M, dẫn đến $|\omega|$ là hằng số.

Mặt khác, từ M thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng, chúng ta có $\mathrm{vol}(M) = \infty$. Do đó, nếu $\omega \in H^{p,\ell}(L^Q(M))$ và $|\omega| = \mathrm{const} > 0$ thì $\int\limits_M |\omega|^Q = |\omega|^Q.\mathrm{vol}(M) = \infty$. Điều này là vô lí. Vì vậy $\omega = 0$. Định lí 2.2.1 được chứng minh xong. □

Đặc biệt, khi $p = 2$, chúng ta thu được kết quả triệt tiêu sau cho ℓ-dạng vi phân điều hòa.

Hệ quả 2.2.4. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann được định hướng, không compact, đầy đủ, thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử*

$$\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z| - \frac{n^2-n-2}{n^2-n}R \leq C\rho(x)$$

với hằng số $C = C(n,\ell,Q) \in \left(0, \frac{8(Q-1)+\frac{4}{\max\{\ell,n-\ell\}}}{Q^2}\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq 2)$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn hằng. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Nhắc lại giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M)$ của một đa tạp Riemann M được xác định bởi $\lambda_1(M) = \inf\limits_{f\in C_0^\infty(M)} \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}$. Do đó, nếu $\lambda_1(M) > 0$ thì một bất đẳng thức Poincaré có trọng đúng trên M. Do đó, sử dụng Định lí 2.2.1, chúng ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.5. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann được định hướng, không compact, đầy đủ, với $\lambda_1(M) > 0$. Giả sử*

$$\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z| - \frac{n^2-n-2}{n^2-n}R \leq C\lambda_1(M)$$

với hằng số $C = C(p,n,\ell,Q) \in \left(0, \frac{8(Q-1)+4B_p(p-1)^2}{Q^2}\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq p \geq 2)$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Tiếp theo chúng tôi chứng minh một định lí triệt tiêu cho đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương với điều kiện độ cong tại từng điểm.

Định lí 2.2.6 (Định lí 1.1.4)**.** *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương, không compact, đầy đủ, với độ cong vô hướng $R > 0$. Giả sử M thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử rằng*

$$\frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2R^2\right) \leq C\rho(x) \tag{2.10}$$

với hằng số $C = C(p, n, \ell, Q) \in \left(0, \frac{4}{Q^2}\left[Q - 1 + B_p(p-1)^2\right]\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, \ell \neq \frac{n}{2}, Q \geq p \geq 2)$ và $a = \frac{(n-1)(n-2\ell)^2}{2(n-2)^2}$, $b = \frac{n-2}{(n-1)|n-2\ell|}\sqrt{\frac{\ell(n-\ell)}{n}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Chứng minh. Từ bất đẳng thức (2.5) và bất đẳng thức dạng Kato, chúng ta có

$$|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2R^2\right)|\omega|^p - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle.$$

Cho $\varphi \in C_0^\infty(M)$ được cho bởi (2.7). Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $\varphi^2|\omega|^q, (q \geq 0)$ và lấy tích phân trên M, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq & B_p(p-1)^2 \int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\ & - \int\limits_M \frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2R^2\right)\varphi^2|\omega|^{p+q} - \int\limits_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle.\end{aligned}$$

Tích phân từng phần và sử dụng giả thiết (2.10), cùng Bổ đề 2.2.3, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}&-[(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2]\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + 2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| \\ &\geq -C\int\limits_M |\nabla(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}})|^2 - 2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| \\ &\qquad - (p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2.\end{aligned}$$

Do đó, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&-\left[(p-1)(q+1)+B_p(p-1)^2\right]\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\\
\geq &-C\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2-\frac{(p+q)^2C}{4}\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\\
&-(4p-6+(p+q)C)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||-(p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, chúng ta thu được

$$2\varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||\leq \varepsilon\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2+\frac{1}{\varepsilon}|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2,$$

với mọi $\varepsilon>0$. Do đó, với $Q:=p+q$, bất đẳng thức trên dẫn đến

$$D\int\limits_M |\omega|^{Q}|\nabla\varphi|^2\geq A\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}.|\nabla|\omega||^2,$$

ở đó

$$\begin{aligned}
A:=&(p-1)(q+1)+B_p(p-1)^2-(p-2)q-\frac{(p+q)^2C}{4}-\varepsilon\left|2p-3+\frac{(p+q)C}{2}\right|\\
=&Q-1+B_p(p-1)^2-\frac{Q^2C}{4}-\varepsilon\left|2p-3+\frac{QC}{2}\right|
\end{aligned}$$

và

$$D:=C+\frac{\left|2p-3+\frac{(p+q)C}{2}\right|}{\varepsilon}=C+\frac{\left|2p-3+\frac{QC}{2}\right|}{\varepsilon}.$$

Sử dụng lập luận tương tự như trong Định lí 2.2.1, chúng ta hoàn thành chứng minh Định lí 2.2.6. □

Bằng cách cho $p=2$, chúng ta thu được ngay một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa. Ngoài ra, bằng cách áp dụng hàm trọng $\rho(x)$ trong Định lí 2.2.6 cho $\lambda_1(M)>0$, chúng ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.7. *Cho $(M^n,g)(n\geq 4)$ là một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương, không compact, đầy đủ, với độ cong vô hướng $R>0$ và giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M)>0$. Giả sử rằng*

$$\frac{a}{R}\left(|E|^2-b^2R^2\right)\leq C\lambda_1(M)$$

với hằng số $C = C(p,n,\ell,Q) \in \left(0, \frac{4}{Q^2}\left[Q-1+B_p(p-1)^2\right]\right)$ *(*$2 \le \ell \le n-2, \ell \neq \frac{n}{2}, Q \ge p \ge 2$*) và* $a = \frac{(n-1)(n-2\ell)^2}{2(n-2)^2}$, $b = \frac{n-2}{(n-1)|n-2\ell|}\sqrt{\frac{\ell(n-\ell)}{n}}$. *Khi đó, mọi* ℓ*-dạng vi phân* p*-điều hòa* ω *trên* M *thỏa mãn* $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ *đều có chuẩn hằng. Đặc biệt,* $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Bây giờ chúng ta chứng minh kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với điều kiện của tensor Ricci với vết bằng không E và tensor độ cong Weyl W.

Định lí 2.2.8 (Định lí 1.1.6)**.** *Cho* $(M^n, g)(n \ge 4)$ *là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương* $\rho(x)$ *và độ cong vô hướng* $R \ge 0$*. Giả sử*

$$|W|(x) + a_\ell |E|(x) \le C_\ell \rho(x) \tag{2.11}$$

với hằng số $0 < C_\ell < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{\ell(\ell-1)p^2}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ *ở đó* $2 \le \ell \le n-2$, $\ell \neq \frac{n}{2}$, $p \ge 2$ *và* $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$*. Khi đó, mọi* ℓ*-dạng vi phân* p*-điều hòa* ω *trên* M *thỏa mãn* $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ *đều triệt tiêu. Đặc biệt,* $H^{p,\ell}(L^p(M)) = \{0\}$.

Chứng minh. Bởi bất đẳng thức (2.4), chúng ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Delta|\omega|^{2(p-1)} \\
\ge& |\nabla(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 + \langle \Delta(|\omega|^{p-2}\omega), |\omega|^{p-2}\omega\rangle - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|W||\omega|^{2(p-1)} \\
&- \frac{\ell|n-2\ell|}{n-2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}|E||\omega|^{2(p-1)} + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}R|\omega|^{2(p-1)}.
\end{aligned}$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức dạng Kato và chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $|\omega|^{p-2}$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
&|\omega|\Delta|\omega|^{p-1}\\
\geq &B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega),\omega\rangle - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|W||\omega|^p\\
&\qquad - \frac{\ell|n-2\ell|}{n-2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}|E||\omega|^p + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}R|\omega|^p\\
= &B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega),\omega\rangle + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}R|\omega|^p\\
&\qquad - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\left(|W|+a_\ell|E|\right)|\omega|^p,
\end{aligned}\tag{2.12}$$

ở đó $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Từ $R\geq 0$, bất đẳng thức (2.12) kéo theo

$$\begin{aligned}
|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq &B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega),\omega\rangle\\
&- \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\left(|W|+a_\ell|E|\right)|\omega|^p.
\end{aligned}$$

Lấy $\varphi\in C_0^\infty(M)$ được cho bởi công thức (2.7). Nhân hai vế bất đẳng thức trên với φ^2 và lấy tích phân trên M, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int_M \varphi^2|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq &B_p(p-1)^2\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \int_M\langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2\omega)\rangle\\
&- \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\int_M \varphi^2\left(|W|+a_\ell|E|\right)|\omega|^p.
\end{aligned}$$

Sử dụng tích phân từng phần, bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\begin{aligned}
&-\left[p-1+B_p(p-1)^2\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - 2(p-1)\int_M \varphi|\omega|^{p-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\\
&\geq -\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2\omega)\rangle - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\int_M \varphi^2\left(|W|+a_\ell|E|\right)|\omega|^p.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Theo Bổ đề 2.2.3 và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2\omega)\rangle &\leq 2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||\\
&\leq (p-2)\left[\varepsilon\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |\omega|^p|\nabla\varphi|^2\right]
\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$. Giả thiết về độ cong (2.11) cùng với bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) kéo theo

$$\begin{aligned}
&\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\int_M \varphi^2\left(|W|+a_\ell|E|\right)|\omega|^p\\
&\leq \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}C_\ell\int_M |\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p}{2}}\right)|^2\\
&\leq \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}C_\ell\int_M \left[\frac{p^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2+|\omega|^p|\nabla\varphi|^2+p\varphi|\omega|^{p-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\right]\\
&= A\int_M \left[\frac{p^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2+|\omega|^p|\nabla\varphi|^2+p\varphi|\omega|^{p-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\right]
\end{aligned}$$

ở đó

$$A := \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}C_\ell.$$

Do đó, hai bất đẳng thức trên và bất đẳng thức (2.13) dẫn đến

$$\begin{aligned}
\left(A+\frac{p-2}{\varepsilon}\right)&\int_M |\omega|^p|\nabla\varphi|^2\\
&\geq \left[p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\quad+(2p-2-Ap)\int_M \varphi|\omega|^{p-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\\
&\geq \left[p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\quad-\frac{\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|}{\gamma}\int_M |\omega|^p|\nabla\varphi|^2-\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|\gamma\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2
\end{aligned}$$

với mọi $\gamma > 0$. Bằng cách sắp xếp lại, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&\left(A+\frac{p-2}{\varepsilon}+\frac{\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|}{\gamma}\right)\int_M |\omega|^p|\nabla\varphi|^2\\
&\geq \left[p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}-\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|\gamma\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Từ $0 < C_\ell < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{\ell(\ell-1)p^2}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$, ta có

$$p-1+B_p(p-1)^2-\frac{Ap^2}{4} > 0.$$

Do đó, chúng ta có thể chọn ε và γ đủ nhỏ sao cho

$$p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}-\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|\gamma>0.$$

Vì vậy, từ (2.14) chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
&\left[p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}-\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|\gamma\right]\int_{B_{x_0}(r)}|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\leq\left[p-1+B_p(p-1)^2-(p-2)\varepsilon-\frac{Ap^2}{4}-\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|\gamma\right]\int_M\varphi^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\leq\left(A+\frac{p-2}{\varepsilon}+\frac{\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|}{\gamma}\right)\int_M|\omega|^p|\nabla\varphi|^2\\
&\leq\left(A+\frac{p-2}{\varepsilon}+\frac{\left|p-1-\frac{Ap}{2}\right|}{\gamma}\right)\cdot\frac{4}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)}|\omega|^p.
\end{aligned}$$

Cho $r\to\infty$, chúng ta thu được $|\omega|=\text{const}$. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.2.1, suy ra $\omega=0$. Định lí được chứng minh xong. □

Khi $p=2$, kết quả của chúng ta quay về kết quả của H. Lin như sau.

Hệ quả 2.2.9 ([58]). *Cho $(M^n,g)(n\geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R\geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x)+a_\ell|E|(x)\leq C_\ell\rho(x)$$

với hằng số $0<C_\ell<\frac{2\left(1+\frac{1}{\max\{\ell,n-\ell\}}\right)}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ $(2\leq\ell\leq n-2,\ell\neq\frac{n}{2})$ và $a_\ell=\frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\int\limits_{B_{x_0}(r)}|\omega|^2=0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^2(M))=\{0\}$.

Mặt khác, chúng ta để ý rằng trong trường hợp $\ell=\frac{n}{2}=m$, bất đẳng thức (2.4) kéo theo

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2\geq|\nabla\omega|^2+\langle\Delta\omega,\omega\rangle-\frac{m(m-1)}{2}\sqrt{\frac{2m^2-m-1}{2m^2-m}}|W||\omega|^2+\frac{m}{4m-2}R|\omega|^2.$$

Do đó, chúng ta có một kết quả tương tự như Định lí 2.2.8 như sau.

Định lí 2.2.10 (Định lí 1.1.7). *Cho $(M^{2m}, g)(m \geq 2)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) \leq C_m \rho(x)$$

với hằng số

$$0 < C_m < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{m(m-1)p^2}\sqrt{\frac{m(2m-1)}{(2m+1)(m-1)}} \text{ và } p \geq 2.$$

Khi đó, mọi m-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ là m-dạng vi phân song song. Đặc biệt, $H^{p,m}(L^p(M)) = \{0\}$.

Chứng minh. Áp dụng lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.2.8 với lưu ý rằng không có số hạng chứa $|E|$, chúng ta kết thúc chứng minh Định lí 2.2.10. □

Hệ quả, khi $p = 2$, từ Định lí 2.2.10, chúng ta thu được kết quả sau.

Hệ quả 2.2.11 ([58]). *Cho $(M^{2m}, g)(m \geq 2)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) \leq C_m \rho(x)$$

với hằng số $0 < C_m < \frac{2(1+m)}{m^2(m-1)}\sqrt{\frac{m(2m-1)}{(2m+1)(m-1)}}$. Khi đó, mọi m-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^2 = 0$ là m-dạng vi phân song song. Đặc biệt, $H^{2,m}(L^2(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 2.2.1. *Chúng ta để ý rằng trong Định lí 2.2.10, chúng ta không cần đến giả thiết: độ cong vô hướng dương tại một điểm nào đó của M. Do đó, chúng ta có thể bỏ giả thiết này trong Định lí 1.3 trong bài báo [58] giống như phát biểu trong Hệ quả 2.2.11. Vì vậy, Hệ quả 2.2.11 là tốt hơn một chút so với kết quả của H. Lin trong bài báo [58].*

2.3 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với tensor độ cong thuần túy

Trong phần này, chúng tôi xét một đa tạp Riemann với tensor độ cong thuần túy. Trong trường hợp không compact, bằng cách thay thế điều kiện độ cong bởi độ cong ℓ-không âm và sử dụng phương pháp như mục trước, chúng ta thu được kết quả như sau.

Định lí 2.3.1 (Định lí 1.1.9). *Cho $(M^n, g)(n \geq 3)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với tensor độ cong thuần túy và độ cong ℓ-không âm, $1 \leq \ell \leq n-1$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ $(q \geq p \geq 2)$ đều có chuẩn hằng. Nếu giả sử thêm $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ thì ω triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^q(M)) = \{0\}$.*

Chứng minh. Điều kiện độ cong ℓ-không âm kéo theo $F(\omega) \geq 0$ (xem [58], Định lí 6.1). Do đó, từ bất đẳng thức (2.1) ta có

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 \geq |\nabla\omega|^2 + \langle \Delta\omega, \omega \rangle.$$

Thay thế ω bởi $|\omega|^{p-2}\omega$ và sử dụng Bổ đề 2.2.2, chúng ta có

$$|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle.$$

Cho $\varphi \in C_0^\infty(M)$ được xác định bởi (2.7). Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $\varphi^2|\omega|^{q-p}$ $(q \geq p)$ và lấy tích phân trên M, chúng ta có

$$\int_M \varphi^2|\omega|^{q-p+1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq B_p(p-1)^2 \int_M \varphi^2|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2 - \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^{q-p}\omega)\rangle.$$

Bởi tích phân từng phần và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, chúng ta thu được

$$\int_M \varphi^2|\omega|^{q-p+1}\Delta|\omega|^{p-1} \leq (p-1)\left[(b-q+p-1)\int_M \varphi^2|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{b}\int_M |\omega|^q|\nabla\varphi|^2\right]$$

với mọi $b > 0$.

Mặt khác, ta có

$$\langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^{q-p}\omega)\rangle \leq (p-2)\left[(\varepsilon+q-p)\varphi^2|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\omega|^q|\nabla\varphi|^2\right]$$

với mọi $\varepsilon > 0$. Do đó,

$$\left[B_p(p-1)^2 - (p-1)(b-q+p-1) - (p-2)\varepsilon - (p-2)(q-p)\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2$$
$$\leq \left(\frac{p-1}{b} + \frac{p-2}{\varepsilon}\right)\int_M |\omega|^q|\nabla\varphi|^2.$$

Từ $q \geq p \geq 2 > 1 - B_p(p-1)^2$, ta có $B_p(p-1)^2 + (p-1)(q-p+1) - (p-2)(q-p) > 0$. Do đó, ta có thể chọn b và ε đủ nhỏ sao cho

$$B_p(p-1)^2 - (p-1)(b-q+p-1) - (p-2)\varepsilon - (p-2)(q-p) > 0.$$

Điều này kéo theo

$$
\begin{aligned}
&\big[B_p(p-1)^2-(p-1)(b-q+p-1)-(p-2)\varepsilon-(p-2)(q-p)\big]\int_{B_{x_0}(r)}|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\leq\big[B_p(p-1)^2-(p-1)(b-q+p-1)-(p-2)\varepsilon-(p-2)(q-p)\big]\int_M\varphi^2|\omega|^{q-2}|\nabla|\omega||^2\\
&\leq\left(\frac{p-1}{b}+\frac{p-2}{\varepsilon}\right)\int_M|\omega|^q|\nabla\varphi|^2\\
&\leq\left(\frac{p-1}{b}+\frac{p-2}{\varepsilon}\right)\frac{4}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)}|\omega|^q.
\end{aligned}
$$

Cho $r\to\infty$ ta thu được $|\omega|$=const. Phần còn lại của chứng minh là theo cách chứng minh của Định lí 6.2 trong bài báo [58]. Điều kiện độ cong ℓ-không âm kéo theo M có độ cong Ricci không âm. Từ M không compact, theo [95], ta có $\mathrm{vol}(B_{x_0}(r))\geq cr$ với $c>0$ nào đó. Mặt khác, giả thiết $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int\limits_{B_{x_0}(r)}|\omega|^q=0$ kéo theo $|\omega|^q.\mathrm{vol}(B_{x_0}(r))=\int\limits_{B_{x_0}(r)}|\omega|^q=o(r)$ khi $r\to\infty$. Do đó $\omega=0$. Định lí được chứng minh xong. □

Đặc biệt, khi $p=2$, Định lí 2.3.1 kéo theo một kết quả tương tự như trong bài báo [58] như sau.

Hệ quả 2.3.2. *Cho $(M^n,g)(n\geq 3)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với tensor độ cong thuần túy và độ cong ℓ-không âm, $1\leq\ell\leq n-1$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\int\limits_{B_{x_0}(r)}|\omega|^q=0$, $(q\geq 2)$ đều có chuẩn hằng. Nếu giả sử thêm $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int\limits_{B_{x_0}(r)}|\omega|^q=0$ thì ω triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^q(M))=\{0\}$.*

2.4 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với bất biến Yamabe dương

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann với bất biến Yamabe dương. Khi M có độ cong vô hướng R không âm và bất biến Yamabe $\mathcal{Q}(M,g)$ dương, H. Lin [58] đã chứng minh một kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân L^2 điều hòa. Từ đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu ℓ-dạng vi phân L^Q p-điều hòa và thu được kết quả mở rộng như sau.

Định lí 2.4.1 (Định lí 1.1.11)**.** *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M, g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int\limits_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int\limits_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell \mathcal{Q}(M, g) \tag{2.15}$$

ở đó $c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}} \min\left\{\frac{4Q-4+4B_p(p-1)^2}{Q^2}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\}$ $(2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq p \geq 2)$ *và* $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$*. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn* $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ *đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.*

Chứng minh. Lấy $\varphi \in C_0^\infty(M)$ được cho bởi (2.7). Nhân hai vế của bất đẳng thức (2.12) với $\varphi^2|\omega|^q, (q \geq 0)$ và lấy tích phân trên M, ta có

$$\begin{aligned}\int_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq & B_p(p-1)^2 \int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\ & - \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}\int_M R\varphi^2|\omega|^{p+q} \\ & - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}\int_M (|W| + a_\ell|E|)\,\varphi^2|\omega|^{p+q}. \end{aligned}\tag{2.16}$$

Dùng tích phân từng phần và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\int_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \leq (p-1)\left[(b-q-1)\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{b}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2\right]$$

với mọi $b > 0$.

Mặt khác, sử dụng (1.6) cùng với bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức

Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(|W| + a_\ell |E|\right) \varphi^2 |\omega|^{p+q} \\
\leq &\left[\left(\int\limits_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int\limits_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\right] \left(\int\limits_M \left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
\leq &T \int\limits_M \left(|\nabla(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}})|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R\varphi^2|\omega|^{p+q}\right) \\
= &T \int\limits_M \left(\frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R\varphi^2|\omega|^{p+q}\right) \\
&+ (p+q)T \int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}\langle \nabla\varphi, \nabla|\omega|\rangle \\
\leq &T \int\limits_M \left[\left(\frac{(p+q)^2}{4} + \frac{p+q}{2}b\right)\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \left(1 + \frac{p+q}{2b}\right)|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2\right] \\
&+ T\frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R\varphi^2|\omega|^{p+q},
\end{aligned}$$

ở đó $T = \mathcal{Q}^{-1}(M,g)\left[\left(\int\limits_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int\limits_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}\right]$.

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle \\
\leq &2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + (p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
\leq &(p-2)(\eta+q)\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + (p-2)\frac{1}{\eta}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2
\end{aligned}$$

với mọi $\eta > 0$. Do đó, (2.16) kéo theo

$$\begin{aligned}
&(p-1)\left[(b-q-1)\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{b}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2\right]\\
&\geq B_p(p-1)^2\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n}\int_M R\varphi^2|\omega|^{p+q}\\
&-(p-2)\int_M \left[(\eta+q)\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{\eta}|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2\right]\\
&-\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\int\limits_M \left(\frac{(p+q)^2}{4} + \frac{p+q}{2}b\right)\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\\
&-\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\int\limits_M \left(1+\frac{p+q}{2b}\right)|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2\\
&-\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\frac{n-2}{4(n-1)}\int\limits_M R\varphi^2|\omega|^{p+q}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, với $Q := p+q$, ta thu được

$$A\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 + C\int_M R\varphi^2|\omega|^Q \leq D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2 \tag{2.17}$$

ở đó

$$\begin{aligned}
A :=& B_p(p-1)^2 - (p-1)(b-q-1) - (p-2)(\eta+q)\\
&-\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\left(\frac{(p+q)^2}{4}+\frac{p+q}{2}b\right)\\
=& B_p(p-1)^2 + Q - 1 - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\frac{Q^2}{4} - b(p-1) - (p-2)\eta\\
&-\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\frac{Qb}{2};\\
C :=& \frac{\ell(n-\ell)}{n^2-n} - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\frac{n-2}{4(n-1)};\\
D :=& \frac{p-1}{b} + \frac{p-2}{\eta} + \left(1+\frac{p+q}{2b}\right)\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\\
=& \frac{p-1}{b} + \frac{p-2}{\eta} + \left(1+\frac{Q}{2b}\right)\frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T.
\end{aligned}$$

Giả thiết (2.15) dẫn đến

$$T < \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}\min\left\{\frac{4Q-4+4B_p(p-1)^2}{Q^2}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\} = c_\ell$$

tức là $C > 0$ và

$$B_p(p-1)^2 + Q - 1 - \frac{\ell(\ell-1)}{2}\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}T\frac{Q^2}{4} > 0.$$

Do đó, ta có thể chọn η và b đủ nhỏ sao cho $A > 0$.

Hơn nữa, thay φ vào (2.17) và để ý giả thiết $R \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} A\int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 + C\int_{B_{x_0}(r)} R|\omega|^Q &\leq A\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 + C\int_M R\varphi^2|\omega|^Q \\ &\leq D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2 \leq \frac{4D}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^Q. \end{aligned}$$

Cho $r \to \infty$, ta suy ra

$$|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 = 0 \text{ và } R|\omega|^Q = 0.$$

Do đó, $|\omega|$= const. Phần còn lại của chứng minh là theo cách chứng minh trong Định lí 4.3 của bài báo [58]. Nếu $|\omega|$ không đồng nhất bằng 0 thì $R = 0$. Do đó bất đẳng thức Sobolev (1.7) đúng trên M. Theo [50], ta có $\frac{\operatorname{vol}(B_{x_0}(r))}{r^2} \geq Kr^{n-2} \to \infty$ khi $r \to \infty$, với hằng số $K > 0$ nào đó. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$. Do đó, ta có $\omega = 0$. Định lí được chứng minh xong. □

Đặc biệt, khi $Q = p = 2$, Định lí 2.4.1 trở thành Định lí 4.3 trong bài báo [58].

Hệ quả 2.4.2 ([58])**.** *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M, g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell\left(\int_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell\mathcal{Q}(M, g)$$

ở đó

$$c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}\min\left\{1 + \frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\} (2 \leq \ell \leq n-2)$$

và

$$a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}.$$

Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân đóng và đối đóng ω trên M thỏa mãn $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^2 = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^2(M)) = \{0\}$.

Khi $p = 2$ và bất kì $Q \geq 2$, ta thu được hệ quả sau cho ℓ-dạng vi phân điều hòa.

Hệ quả 2.4.3. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M, g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell \mathcal{Q}(M, g)$$

ở đó

$$c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}} \min\left\{\frac{4Q - 4 + \frac{4}{\max\{\ell, n-\ell\}}}{Q^2}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\} (2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq 2)$$

và

$$a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}.$$

Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{2,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

2.5 Tính triệt tiêu của 1-dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức

Trong phần này, chúng tôi xét trường hợp đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức. Trước hết, chúng tôi nhắc lại một số công thức cần dùng như sau.

Cho M là một đa tạp con thực hoàn toàn được nhúng trong $\widetilde{M}_{n+k}(c)$. Kí hiệu ∇ (tương ứng $\widetilde{\nabla}$) là đạo hàm hiệp biến ứng với g (tương ứng $\widetilde{g}$). Khi đó, dạng cơ bản thứ hai σ của phép nhúng được cho bởi $\sigma(X, Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. Cho một trường véc tơ pháp tuyến ξ trên M, ta viết $\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi$, ở đó $-A_\xi X$ (tương ứng $D_X \xi$) kí hiệu là thành phần tiếp xúc (tương ứng pháp tuyến) của $\widetilde{\nabla}_X \xi$. Khi đó, ta có

$$\widetilde{g}(\sigma(X, Y), \xi) = g(A_\xi X, Y).$$

Véc tơ độ cong trung bình H được cho bởi $H = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Trace}\, \sigma$. Một đa tạp con M được gọi là cực tiểu nếu $H = 0$ một cách đồng nhất. Cho dạng cơ bản thứ hai σ, ta định nghĩa đạo hàm hiệp biến ∇' tương ứng với connection trong (phân thớ tiếp xúc) $\oplus$ (phân thớ pháp tuyến) bởi

$$(\nabla'_X\sigma)(Y,Z) = D_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)$$

với mọi trường véc tơ tiếp xúc X, Y và Z trên M.

Chúng ta chọn một trường địa phương các frame trực chuẩn

$$e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+p}, e_{1^*} = \widetilde{J}e_n, e_{(n+1)^*} = \widetilde{J}e_{n+1}, ..., e_{(n+p)^*} = \widetilde{J}e_{n+p}$$

trong $\widetilde{M}$ theo một cách mà hạn chế trên M thì $e_1, ..., e_n$ là tiếp xúc trên M. Gọi Ric là tensor Ricci của M. Khi đó, với mọi véc tơ tiếp xúc đơn vị X và Y, ta có (xem [20])

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \frac{1}{4}(n-1)cg(X,Y) + \sum (\mathrm{TraceA}_\alpha))\, g(A_\alpha X, Y) - \sum g(A_\alpha X, A_\alpha Y) \\
&\geq \frac{1}{4}(n-1)c - \sum |\mathrm{TraceA}_\alpha||\mathrm{A}_\alpha| - |\mathrm{A}|^2 \\
&= \frac{1}{4}(n-1)c - n|H||A| - |A|^2. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Giả sử M là một đa tạp con cực tiểu, tức là $\mathrm{TraceA}_\alpha = 0$ với mọi α. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành

$$\mathrm{Ric}(X,Y) \geq \frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2. \qquad (2.19)$$

Gần đây, Choi-Seo [22] đã chứng minh rằng nếu k-chuẩn của dạng cơ bản thứ hai vết không của một đa tạp con thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ, n chiều Σ trong $\mathbb{C}P^n$ là đủ nhỏ, thì không tồn tại 1-dạng vi phân L^p điều hòa, với p nào đó. Thêm nữa, trong bài báo [25], D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn thu được một kết quả triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa trên các đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn của các dạng không gian phức.

Xuất phát từ các kết quả trên, trong phần này, luận án nghiên cứu một lớp các 1-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp con cực tiểu hoặc không cực tiểu, thực hoàn toàn được nhúng trong một dạng không gian phức. Khi đa tạp con là cực tiểu, chúng tôi thu được kết quả như sau.

Định lí 2.5.1 (Định lí 1.2.2)**.** *Cho M là một đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ, n chiều $(n \geq 3)$ được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau đúng*

(i) $c = -1$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C} - \frac{Q^2}{(n-1)C}}$;

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C}}$

thì mọi 1*-dạng vi phân* L^Q p*-điều hòa trên* M *đều triệt tiêu, với* $Q \geq p \geq 2$*. Ở đây,* C *kí hiệu hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số* B_p *trong Bổ đề 2.5.2 và* $\|A\|_n = \left(\int_M |A|^n\right)^{\frac{1}{n}}$*.*

Nhận xét 2.5.1. *Chúng ta thấy rằng tồn tại* Q *sao cho với bất kì* $p \geq 2$ *thì cận trên của* $\|A\|_n$ *trong định lí trên là xác định. Chẳng hạn, nếu* $2 \leq p < 1 + \sqrt{n-1}$ *thì*

$$\frac{n-1-\sqrt{n^2-6n+5+4(p-1)^2}}{2} < Q < \frac{n-1+\sqrt{n^2-6n+5+4(p-1)^2}}{2},$$

hoặc nếu $p \geq \sqrt{n-1}+1$ *thì* $2 \leq Q < n-1$*.*

Nhận xét 2.5.2. *Chúng ta nhận thấy Định lí 2.5.1 là một tổng quát của kết quả của D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn trong bài báo [25] khi* $p = 2$*.*

Để chứng minh các kết quả, chúng tôi nhắc lại một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.5.2 (Bất đẳng thức dạng Kato - xem [34, 35])**.** *Cho* $p \geq 2$ *và* ω *là một* 1*-dạng vi phân* p*-điều hòa trên đa tạp Riemann đầy đủ,* n *chiều* M*. Khi đó, ta có*

$$|\nabla(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \geq (B_p+1)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2,$$

với $B_p = \frac{1}{(p-1)^2}\min\{1, \frac{(p-1)^2}{n-1}\}$*.*

Nhắc lại ta có bất đẳng thức Sobolev trên các đa tạp con được nhúng như sau.

Bổ đề 2.5.3 (Xem [43, 64])**.** *Cho* M^n *là một đa tạp con đầy đủ được nhúng trong một đa tạp có độ cong không dương* $N^{n+p}, n \geq 3$*. Khi đó, với bất kì* $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$*, ta có*

$$\left(\int_M |\varphi|^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C\int_M \left[|\nabla\varphi|^2 + |H|^2\varphi^2\right],$$

ở đó C *là hằng số Sobolev chỉ phụ thuộc vào* n *và* H *kí hiệu véc tơ độ cong trung bình của* M*.*

Từ đó, chúng ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.5.4. *Cho M^n là một đa tạp con đầy đủ được nhúng trong một đa tạp có độ cong không dương $N^{n+p}, n \geq 3$ và H là véc tơ độ cong trung bình của M. Nếu*

(i) $\text{Vol}(M) = \infty$ *và* $\int_M |H|^n < \infty$ *hoặc;*

(ii) $\left(\int_M |H|^n\right)^{1/n} \leq \sqrt{\dfrac{1}{\alpha C}}$, *với số nào đó* $\alpha > 1$,

thì với mọi $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$, *ta có*

$$\left(\int_M |\varphi|^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_s \int_M |\nabla\varphi|^2,$$

ở đó $C_s = \frac{\alpha C}{\alpha - 1}$ *và C là hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3.*

Chứng minh. Nếu $\text{Vol}(M) = \infty$ và $\int_M |H|^n < \infty$ thì kết luận được suy ra từ Mệnh đề 2.5 và các lập luận trong chứng minh của Bổ đề 2.6 trong bài báo [16].

Bây giờ giả sử $\left(\int_M |H|^n\right)^{1/n} \leq \sqrt{\dfrac{1}{\alpha C}}$, với số nào đó $\alpha > 1$, bất đẳng thức Hölder kéo theo

$$\int_M |H|^2\varphi^2 \leq \left(\int_M |H|^n\right)^{2/n} \left(\int_M \varphi^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{1}{\alpha C}\left(\int_M \varphi^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Kết hợp điều này cùng với bất đẳng thức Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, chúng ta hoàn thành chứng minh của Bổ đề 2.5.4. □

Chúng ta cũng có bất đẳng thức Sobolev sau đây cho đa tạp con thực hoàn toàn được nhúng trong không gian xạ ảnh phức.

Bổ đề 2.5.5 (Xem [22]). *Cho M^n $(n \geq 3)$ là một đa tạp con thực hoàn toàn trong $\mathbb{C}P^m$. Khi đó, với bất kì $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$, ta có*

$$\left(\int_M |\varphi|^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_s\left(\int_M |\nabla\varphi|^2 + n^2\int_M (|H|^2+1)\varphi^2\right),$$

ở đây C_s là hằng số Sobolev chỉ phụ thuộc vào n và H là véc tơ độ cong trung bình được chuẩn hóa trên M.

Cuối cùng, chúng ta sử dụng ước lượng sau cho giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace trên đa tạp con.

Bổ đề 2.5.6 (Xem [6]). *Cho N là một đa tạp Riemann đơn liên, đầy đủ, $n-$chiều với độ cong nhát cắt K_N thỏa mãn $K_N \leq -a^2$ với một hằng số dương $a > 0$. Cho M là một đa tạp con không compact, đầy đủ, $m-$chiều với véc tơ độ cong trung bình H bị chặn trong N thỏa mãn $|H| \leq b < (m-1)a$. Khi đó*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{[(m-1)a - b]^2}{4}.$$

Trong phần tiếp theo của mục này, chúng ta xét một 1-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M. Để đơn giản về mặt kí hiệu, chúng ta sẽ viết cho cả một 1-dạng vi phân p-điều hòa ω và trường véc tơ đối ngẫu của nó là ω. Bây giờ chúng ta chứng minh Định lí 2.5.1.

Chứng minh Định lí 2.5.1. Như thường lệ, chúng ta bắt đầu với công thức Bochner và bất đẳng thức (2.19) để thu được

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 &= |\nabla\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle + \mathrm{Ric}(\omega, \omega)\\ &\geq |\nabla\omega|^2 + \langle\Delta\omega, \omega\rangle + \left[\frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2\right]|\omega|^2.\end{aligned}$$

Sử dụng tính chất $\Delta|\omega|^2 = 2|\omega|\Delta|\omega| + 2|\nabla|\omega||^2$, bất đẳng thức trên kéo theo

$$|\omega|\Delta|\omega| \geq |\nabla\omega|^2 - |\nabla|\omega||^2 - \langle(d^*d + dd^*)\omega, \omega\rangle + \left[\frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2\right]|\omega|^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho dạng vi phân $|\omega|^{p-2}\omega$, sau đó dùng bất đẳng thức dạng Kato và chia hai vế cho $|\omega|^{p-2}$, ta có

$$|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle + \left[\frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2\right]|\omega|^p.$$

Chọn một hàm Lipschitz φ với giá compact trong quả cầu trắc địa $B_{x_0}(2r)$ với bán kính $2r$, tâm tại điểm $x_0 \in M$. Nhân hai vế bất đẳng thức trên với $\varphi^2|\omega|^q$, $(q \geq 0)$ và lấy tích phân trên M, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq &B_p(p-1)^2\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 - \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle\\ &+ \frac{1}{4}(n-1)c\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2 - \int_M |A|^2|\omega|^{p+q}\varphi^2. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Bây giờ ta ước lượng các số hạng của bất đẳng thức (2.20) như sau. Đối với số hạng ở vế trái, tích phân từng phần dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1}\\
=&-2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle-(p-1)(q+1)\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\\
\leq&2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||-(p-1)(q+1)\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Bằng cách sử dụng Bổ đề 2.2.3 và bất đẳng thức Schwarz, ta ước lượng vi phân của các dạng trong vế phải của bất đẳng thức (2.20) như sau

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle\\
\leq&\int_M |d|\omega|^{p-2}|\cdot|\omega|\cdot|d(\varphi^2|\omega|^q)|\cdot|\omega|\\
=&\int_M |\nabla|\omega|^{p-2}|\cdot|\omega|\cdot|\nabla(\varphi^2|\omega|^q)|\cdot|\omega|\\
\leq&2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||+(p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Để đánh giá số hạng thứ ba trong vế phải, ta lưu ý rằng nếu $c=-1$, thì độ cong nhát cắt của M nằm trong đoạn $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$. Do đó, từ M là cực tiểu, tức là $H=0$, Bổ đề 2.5.6 kéo theo

$$\lambda_1(M)\geq\frac{(n-1)^2}{16}.$$

Theo định nghĩa của cận dưới của phổ, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)^2}{16}\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2\\
&\leq\lambda_1(M)\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2\\
&\leq\int_M \left|\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)\right|^2\\
&\leq\int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2+\frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2+(p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}\langle\nabla\varphi,\nabla|\omega|\rangle\right]\\
&\leq\int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2+\frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2+(p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||\right].
\end{aligned}$$

Ước lượng này cùng với giả thiết $c \leq 0$ kéo theo

$$\frac{1}{4}(n-1)c\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2 \geq \frac{4c}{n-1}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2 c}{n-1}\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{4(p+q)c}{n-1}\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||. \tag{2.23}$$

Ta lưu ý rằng nếu $c = 0$ thì (2.23) có thể được loại bỏ trong tính toán. Bây giờ, đối với số hạng cuối ở vế phải của (2.20), chúng ta sử dụng bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Sobolev trong Bổ đề 2.5.3 để suy ra

$$\begin{aligned}\int_M |A|^2\left(\varphi^2|\omega|^{p+q}\right) \leq & \|A\|_n^2\left[\int_M \left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)^{2n/(n-2)}\right]^{\frac{n-2}{n}} \\ \leq & \|A\|_n^2 C\int_M \left|\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)\right|^2 \\ \leq & \|A\|_n^2 C\int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\right] \\ & + \|A\|_n^2 C(p+q)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Do đó, kết hợp các bất đẳng thức (2.20)-(2.24) và sắp xếp lại các số hạng, ta thu được

$$\begin{aligned}&\left[(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2 - q(p-2) + \frac{(p+q)^2 c}{n-1} - C\|A\|_n^2\frac{(p+q)^2}{4}\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\ &\leq \left[4p - 6 - \frac{4(p+q)c}{n-1} + C\|A\|_n^2(p+q)\right]\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| \\ &\quad + \left(C\|A\|_n^2 - \frac{4c}{n-1}\right)\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz kéo theo

$$2\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| \leq \epsilon\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 \tag{2.25}$$

với mọi $\epsilon > 0$. Thay ước lượng này vào bất đẳng thức trên, chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
&\left[(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2 - q(p-2) + \frac{(p+q)^2c}{n-1} - C\|A\|_n^2\frac{(p+q)^2}{4}\right]\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
&\leq \left(C\|A\|_n^2 - \frac{4c}{n-1}\right)\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 \\
&\quad + \epsilon\left|2p-3-\frac{2(p+q)c}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2(p+q)\right|\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon}\left|2p-3-\frac{2(p+q)c}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2(p+q)\right|\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Đặt $Q := p+q$, ta có

$$
E\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 \leq D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2 \tag{2.26}
$$

ở đó

$$
\begin{aligned}
E =&(p-1)(q+1) + B_p(p-1)^2 - q(p-2) + \frac{(p+q)^2c}{n-1} - C\|A\|_n^2\frac{(p+q)^2}{4} \\
&- \epsilon\left|2p-3-\frac{2(p+q)c}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2(p+q)\right| \\
=&Q-1+B_p(p-1)^2+\frac{Q^2c}{n-1} - C\|A\|_n^2\frac{Q^2}{4} - \epsilon\left|2p-3-\frac{2Qc}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2Q\right|,
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
D =&C\|A\|_n^2 - \frac{4c}{n-1} + \frac{1}{\epsilon}\left|2p-3-\frac{2(p+q)c}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2(p+q)\right| \\
=&C\|A\|_n^2 - \frac{4c}{n-1} + \frac{1}{\epsilon}\left|2p-3-\frac{2Qc}{n-1}+\frac{1}{2}C\|A\|_n^2Q\right|.
\end{aligned}
$$

Trường hợp 1: $c = -1$. Chúng ta nhận thấy điều kiện

$$
Q-1+B_p(p-1)^2 - \frac{Q^2}{n-1} - C\|A\|_n^2\frac{Q^2}{4} > 0
$$

tương đương với

$$
\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C} - \frac{Q^2}{(n-1)C}}.
$$

Để đảm bảo vế phải của điều kiện trên xác định, ta cần yêu cầu

$$
Q-1+B_p(p-1)^2 - \frac{Q^2}{n-1} > 0.
$$

Bất phương trình này đúng khi

$$p \geq \sqrt{n-1}+1, 0 < Q < n-1$$

hoặc

$$\begin{aligned}
&2 \leq p < 1+\sqrt{n-1},\\
&\frac{n-1-\sqrt{n^2-6n+5+4(p-1)^2}}{2} < Q < \frac{n-1+\sqrt{n^2-6n+5+4(p-1)^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Thật vậy, các điều kiện này thỏa mãn do giả thiết của định lí. Do đó, ta có thể chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $E > 0$. Vì vậy, từ (2.26) ta có

$$\int_M \varphi^2 |\omega|^{Q-2} |\nabla|\omega||^2 \leq \frac{D}{E} \int_M |\omega|^Q |\nabla \varphi|^2.$$

Cố định một điểm $x_0 \in M$ và $r > 0$. Gọi $r(x)$ là khoảng cách trắc địa trên M từ x_0 đến x. Chọn $\varphi \in C_0^\infty(M)$ thỏa mãn

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } r(x) \leq r \\ \in [0,1] \text{ và } |\nabla \varphi|(x) \leq \dfrac{2}{r}, & \text{nếu } r < r(x) \leq 2r \\ 0, & \text{nếu } r(x) > 2r. \end{cases} \tag{2.27}$$

Sử dụng định nghĩa của φ trong (2.27), bất đẳng thức trên kéo theo

$$\int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^{Q-2} |\nabla|\omega||^2 \leq \frac{4D}{Er^2} \int_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^Q.$$

Cho $r \to \infty$ và chú ý rằng $\int_M |\omega|^Q < \infty$, ta thu được $|\omega|^{Q-2}||\nabla|\omega||^2 = 0$ trên M, hệ quả là $|\omega|$ là hằng số.

Mặt khác, từ M thỏa mãn bất đẳng thức Sobolev, ta có $\mathrm{Vol(M)} = \infty$. Do đó, nếu $\int_M |\omega|^Q < \infty$ và $|\omega| = \text{const} > 0$ thì $\int\limits_M |\omega|^Q = |\omega|^Q.\mathrm{Vol(M)} = \infty$. Điều này vô lí. Vậy $\omega = 0$.

Trường hợp 2: $c = 0$. Khi $c = 0$, ta có

$$E = Q - 1 + B_p(p-1)^2 - C\|A\|_n^2 \frac{Q^2}{4} - \epsilon \left| 2p - 3 + \frac{1}{2} C\|A\|_n^2 Q \right|.$$

Khi đó, điều kiện $Q - 1 + B_p(p-1)^2 - C\|A\|_n^2 \frac{Q^2}{4} > 0$ tương đương

$$\|A\|_n < \frac{2}{Q} \sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C}}$$

khi $Q > 1 - B_p(p-1)^2$. Bằng cách lặp lại lập luận của **Trường hợp 1**, chúng ta hoàn thành chứng minh Định lí 2.5.1. □

Khi $p = 2$, định lí trên quay về kết quả sau của D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn trong bài báo [25] (Định lí 1.3).

Hệ quả 2.5.7 ([25])**.** *Cho M là một đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1, n \geq 5,\ 1 \leq k < \frac{n-2}{2}$ *và*

$$\|A\|_n < \sqrt{\frac{(2k-1)(n-2k-2)}{k^2(n-1)C}};$$

(ii) $c = 0, k \geq 1$ *và* $\|A\|_n < \sqrt{\frac{2k(n-1)-(n-2)}{(n-1)k^2C}}$

thì mọi 1-dạng vi phân L^{2k} điều hòa trên M đều triệt tiêu.

Chứng minh. Áp dụng Định lí 2.5.1 cho $p = 2$ và $Q = 2k$, ta hoàn thành chứng minh Hệ quả 2.5.7. □

Trong trường hợp đa tạp con không cực tiểu, chúng ta cần thêm một giả thiết về cận dưới của phổ $\lambda_1(M)$ như sau.

Định lí 2.5.8 (Định lí 1.2.3)**.** *Cho M là một đa tạp con không cực tiểu thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1,\ \lambda_1(M) > \frac{(n-1)Q^2}{16[Q-1+B_p(p-1)^2]}$ *và*

$$\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s} - \frac{(n-1)Q^2}{16(n+1)C_s\lambda_1(M)}};$$

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \min\left\{\frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha C}}\right\}$, *ở đó $\alpha > 1, C$ là hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số B_p trong Bổ đề 2.5.2 và* $C_s := \frac{\alpha C}{\alpha - 1}$,

thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trong M đều triệt tiêu, với $Q \geq p \geq 2$.

Chứng minh Định lí 2.5.8. Trước hết, chúng ta để ý nếu $\lambda_1(M) > 0$ thì $\mathrm{Vol}(M) = \infty$. Hơn nữa, $|H| \leq |A|$ luôn luôn đúng. Các giả thiết trong các trường hợp (1) hoặc (2) của Định lí 2.5.8 cùng với Bổ đề 2.5.4 khẳng định rằng trên M có một bất đẳng thức Sobolev.

Bây giờ, nhờ công thức Bochner và bất đẳng thức (2.18), ta có

$$|\omega|\Delta|\omega| \geq |\nabla\omega|^2 - |\nabla|\omega||^2 - \langle (d^*d + dd^*)\omega, \omega\rangle + \left[\frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2 - n|H||A|\right]|\omega|^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho dạng vi phân $|\omega|^{p-2}\omega$, sau đó dùng bất đẳng thức dạng Kato và chia hai vế cho $|\omega|^{p-2}$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq & B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle \\ & + \left[\frac{1}{4}(n-1)c - |A|^2 - n|H||A|\right]|\omega|^p.\end{aligned}$$

Chọn một hàm Lipschitz φ với giá compact trong một quả cầu trắc địa $B_{x_0}(2r)$ bán kính $2r$, tâm tại điểm $x_0 \in M$. Lặp lại tính toán như trong chứng minh Định lí 2.5.1, ta có

$$\begin{aligned}&\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \\ \geq & B_p(p-1)^2\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 - \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle \\ & + \frac{1}{4}(n-1)c\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2 - \int_M |A|^2|\omega|^{p+q}\varphi^2 - n\int_M |H||A||\omega|^{p+q}\varphi^2. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo định nghĩa của $\lambda_1(M)$ và tính đơn điệu theo miền của giá trị riêng, ta có

$$\lambda_1(M) \leq \lambda_1(B_{x_0}(2r)) \leq \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2}{\int_M \varphi^2}$$

với mọi hàm Lipschitz khác hằng có giá compact φ trong quả cầu trắc địa $B_{x_0}(2r)$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}&\lambda_1(M)\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2 \\ \leq & \int_M \left|\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)\right|^2 \\ \leq & \int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + (p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}\langle\nabla\varphi, \nabla|\omega|\rangle\right] \\ \leq & \int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + (p+q)\varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||\right].\end{aligned}$$

Để ý rằng $c \leq 0$, bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(n-1)c\int_M |\omega|^{p+q}\varphi^2 \\
\geq &\frac{(n-1)c}{4\lambda_1(M)}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(n-1)(p+q)^2c}{16\lambda_1(M)}\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
&\qquad + \frac{(n-1)(p+q)c}{4\lambda_1(M)}\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Sobolev trong Hệ quả 2.5.4, ta có

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^2\left(\varphi^2|\omega|^{p+q}\right) \leq &\|A\|_n^2\left[\int_M\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)^{2n/(n-2)}\right]^{\frac{n-2}{n}} \\
\leq &\|A\|_n^2 C_s\int_M\left|\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)\right|^2 \\
\leq &\|A\|_n^2 C_s\int_M\left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\right] \\
&+ \|A\|_n^2 C_s(p+q)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega||. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Từ $|H| \leq |A|$, ta có ngay đánh giá

$$\int_M |H||A||\omega|^{p+q}\varphi^2 \leq \int_M |A|^2|\omega|^{p+q}\varphi^2. \qquad (2.31)$$

Từ (2.21), (2.22) và (2.28)-(2.31), đặt $Q := p+q$, ta thu được

$$E\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 \leq B\int_M \varphi|\omega|^{Q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2,$$

ở đó

$$\begin{aligned}
E &= Q-1+B_p(p-1)^2 - \frac{(n+1)Q^2C_s\|A\|_n^2}{4} + \frac{(n-1)cQ^2}{16\lambda_1(M)}, \\
B &= 4p-6+(n+1)QC_s\|A\|_n^2 - \frac{(n-1)cQ}{4\lambda_1(M)}, \\
D &= (n+1)C_s\|A\|_n^2 - \frac{(n-1)c}{4\lambda_1(M)}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên cùng với (2.25) kéo theo

$$\left(E - \frac{\epsilon}{2}|B|\right)\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 \leq \left(D + \frac{|B|}{2\epsilon}\right)\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2. \qquad (2.32)$$

Trường hợp 1: $c = -1$. Ta để ý các giả thiết

$$\lambda_1(M) > \frac{(n-1)Q^2}{16\left[Q-1+B_p(p-1)^2\right]},$$

$$\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s} - \frac{(n-1)Q^2}{16(n+1)C_s\lambda_1(M)}}$$

kéo theo

$$E = Q - 1 + B_p(p-1)^2 - \frac{(n+1)Q^2C_s\|A\|_n^2}{4} - \frac{(n-1)Q^2}{16\lambda_1(M)} > 0.$$

Khi đó, chúng ta có thể chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $E - \frac{\epsilon}{2}|B| > 0$. Hơn nữa, bằng cách thay φ trong (2.27) vào (2.32), ta thu được

$$\left(E - \frac{\epsilon}{2}|B|\right)\int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 \leq \frac{4}{r^2}\left(D + \frac{|B|}{2\epsilon}\right)\int_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^Q.$$

Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lí 2.5.1, ta thu được $\omega = 0$.

Trường hợp 2: $c = 0$. Khi đó, ta có

$$E = Q - 1 + B_p(p-1)^2 - \frac{(n+1)Q^2C_s\|A\|_n^2}{4}.$$

Do đó, các điều kiện $Q > 1 - B_p(p-1)^2$ và $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s}}$ dẫn đến $E > 0$. Bằng cách lặp lại lập luận của **Trường hợp 1**, chúng ta hoàn thành chứng minh của Định lí 2.5.8. □

Hệ quả, với $p = 2$, chúng ta thu được ngay kết quả sau cho 1-dạng vi phân điều hòa.

Hệ quả 2.5.9. *Cho M là một đa tạp con không cực tiểu thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ, n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1$, $\lambda_1(M) > \frac{(n-1)^2m^2}{4[2m(n-1)-(n-2)]}$, $\|A\|_n < \sqrt{\frac{2m(n-1)-(n-2)}{(n^2-1)m^2C_s} - \frac{n-1}{4(n+1)C_s\lambda_1(M)}}$;

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \min\left\{\sqrt{\frac{2m(n-1)-(n-2)}{(n^2-1)m^2C_s}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha C}}\right\}$, *ở đó* $\alpha > 0, C$ *là hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3 và* $C_s := \frac{\alpha C}{\alpha - 1}$,

thì mọi 1-dạng vi phân L^{2m} điều hòa trên M đều triệt tiêu, với $m \geq 1$.

Nhắc lại rằng trong bài báo [22], Choi-Seo xét một đa tạp con thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ trong một không gian xạ ảnh phức thỏa mãn chuẩn L^n của dạng cơ bản thứ hai vết không là đủ nhỏ và thu được một định lí triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh một kết quả tổng quát hơn cho 1-dạng vi phân p-điều hòa như sau.

Định lí 2.5.10 (Định lí 1.2.5)**.** *Cho M là một đa tạp con thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ, n chiều ($n \geq 3$) trong $\mathbb{C}P^m$. Gọi Φ là dạng cơ bản thứ hai vết không xác định bởi $\Phi = A - Hg$, ở đó A, H và g lần lượt là dạng cơ bản thứ hai, véc tơ độ cong trung bình và metric cảm sinh trên M. Khi đó, với mọi $p \geq 2$, tồn tại Q, δ phụ thuộc vào p, n sao cho nếu $\|\Phi\|_n < \delta$ thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trên M đều triệt tiêu.*

Chúng ta lưu ý là khi $p = 2$, chúng ta thu được một kết quả tương tự như trong [22]. Tuy nhiên, cận dưới cho Q là tốt hơn so với trường hợp trong [22] khi $n \leq 7$. Lí dó bởi vì trong chứng minh của mình, chúng tôi sử dụng định lí dạng Kato hiệu chỉnh, trong khi nó không được dùng trong [22].

Chứng minh Định lí 2.5.10. Theo công thức Bochner và tính chất $\Delta|\omega|^2 = 2|\omega|\Delta|\omega| + 2|\nabla|\omega||^2$, ta có

$$|\omega|\Delta|\omega| = |\nabla\omega|^2 - |\nabla|\omega||^2 - \langle(d^*d + dd^*)\omega, \omega\rangle + \mathrm{Ric}(\omega, \omega) \tag{2.33}$$

Sử dụng ước lượng độ cong Ricci trong [48] và lưu ý rằng độ cong nhát cắt của $\mathbb{C}P^m$ nằm giữa 1 và 4, ta có

$$\mathrm{Ric}(\omega, \omega) \geq (n-1)\left(|H|^2 + 1\right)|\omega|^2 - \frac{n-1}{n}|\Phi|^2|\omega|^2 - \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{n}|\Phi||H||\omega|^2.$$

Bất đẳng thức trên và đẳng thức (2.33) dẫn đến

$$\begin{aligned}|\omega|\Delta|\omega| \geq &|\nabla\omega|^2 - |\nabla|\omega||^2 - \langle(d^*d + dd^*)\omega, \omega\rangle \\ &+ (n-1)\left(|H|^2 + 1\right)|\omega|^2 - \frac{n-1}{n}|\Phi|^2|\omega|^2 - \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{n}|\Phi||H||\omega|^2.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho dạng vi phân $|\omega|^{p-2}\omega$, sau đó dùng bất đẳng thức dạng Kato và chia hai vế cho $|\omega|^{p-2}$, ta có

$$\begin{aligned}|\omega|\Delta|\omega|^{p-1} \geq &B_p(p-1)^2|\omega|^{p-2}|\nabla|\omega||^2 - \langle d^*d(|\omega|^{p-2}\omega), \omega\rangle \\ &+ (n-1)\left(|H|^2 + 1\right)|\omega|^p - \frac{n-1}{n}|\Phi|^2|\omega|^p - \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{n}|\Phi||H||\omega|^p.\end{aligned}$$

Cho $\varphi \in C_0^\infty(M)$ được xác định bởi (2.27). Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $\varphi^2|\omega|^q$, $(q \geq 0)$ và lấy tích phân trên M, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \geq & B_p(p-1)^2\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 - \int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle \\ & + (n-1)\int_M \left(|H|^2+1\right)\varphi^2|\omega|^{p+q} - \frac{n-1}{n}\int_M |\Phi|^2\varphi^2|\omega|^{p+q} \\ & - \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{n}\int_M |\Phi||H|\varphi^2|\omega|^{p+q}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Đối với số hạng ở vế trái, tích phân từng phần cùng với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dẫn đến

$$\begin{aligned}&\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{q+1}\Delta|\omega|^{p-1} \\ &\quad\leq 2(p-1)\int\limits_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| - (p-1)(q+1)\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\ &\quad\leq [(p-1)a-(p-1)(q+1)]\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{p-1}{a}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2,\end{aligned} \tag{2.35}$$

với mọi $a > 0$.

Mặt khác, bởi Bổ đề 2.2.3, bất đẳng thức Schwartz và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned}&\int_M \langle d(|\omega|^{p-2}\omega), d(\varphi^2|\omega|^q\omega)\rangle \\ &\quad\leq 2(p-2)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + (p-2)q\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\ &\quad\leq [(p-2)a+(p-2)q]\int\limits_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 + \frac{p-2}{a}\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Để ước lượng số hạng thứ tư ở vế phải của (2.34), chúng ta sử dụng bất đẳng thức Hölder và Bổ đề 2.5.5 để thu được

$$\begin{aligned}
&\int_M |\Phi|^2 \left(\varphi^2|\omega|^{p+q}\right) \\
&\leq \|\Phi\|_n^2 \left[\int_M \left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)^{2n/(n-2)}\right]^{\frac{n-2}{n}} \\
&\leq \|\Phi\|_n^2 C_s \left[\int_M \left|\nabla\left(\varphi|\omega|^{\frac{p+q}{2}}\right)\right|^2 + n^2\int_M (|H|^2+1)\varphi^2|\omega|^{p+q}\right] \\
&\leq \|\Phi\|_n^2 C_s \int_M \left[|\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \frac{(p+q)^2}{4}\varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2\right] \\
&\quad + \|\Phi\|_n^2 C_s(p+q)\int_M \varphi|\omega|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|\omega|| + \|\Phi\|_n^2 C_s n^2\int_M (|H|^2+1)\varphi^2|\omega|^{p+q} \\
&\leq \|\Phi\|_n^2 C_s\left(\frac{(p+q)^2}{4} + \frac{(p+q)a}{2}\right)\int_M \varphi^2|\omega|^{p+q-2}|\nabla|\omega||^2 \\
&\quad + \|\Phi\|_n^2 C_s\left(1+\frac{p+q}{2a}\right)\int_M |\omega|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 + \|\Phi\|_n^2 C_s n^2\int_M (|H|^2+1)\varphi^2|\omega|^{p+q}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$2\int_M |\Phi||H|\varphi^2|\omega|^{p+q} \leq b\int_M |H|^2\varphi^2|\omega|^{p+q} + \frac{1}{b}\int_M |\Phi|^2\varphi^2|\omega|^{p+q}, \tag{2.38}$$

với mọi $b > 0$.

Do đó, kết hợp các bất đẳng thức (2.34)-(2.38), và đặt $Q := p+q$, ta có

$$E\int_M \varphi^2|\omega|^{Q-2}|\nabla|\omega||^2 + B\int_M |H|^2\varphi^2|\omega|^Q + C\int_M \varphi^2|\omega|^Q \leq D\int_M |\omega|^Q|\nabla\varphi|^2, \tag{2.39}$$

ở đó

$$
\begin{aligned}
E =& p+q-1-(2p-3)a+B_p(p-1)^2 \\
&-\left(\frac{(p+q)^2}{4}+\frac{(p+q)a}{2}\right)C_s\|\Phi\|_n^2\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right] \\
=& Q-1-(2p-3)a+B_p(p-1)^2-\left(\frac{Q^2}{4}+\frac{Qa}{2}\right)C_s\|\Phi\|_n^2\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right] \\
=& Q-1-(2p-3)a+B_p(p-1)^2-\left(\frac{Q^2}{4}+\frac{Qa}{2}\right)C_s\|\Phi\|_n^2\beta; \\
B =& n-1-n(n-1)C_s\|\Phi\|_n^2-\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2n}\left(b+\frac{C_s\|\Phi\|_n^2 n^2}{b}\right) \\
=& \alpha-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\beta; \\
C =& n-1-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right] \\
=& n-1-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\beta; \\
D =& \frac{2p-3}{a}+\left(1+\frac{p+q}{2a}\right)C_s\|\Phi\|_n^2\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right] \\
=& \frac{2p-3}{a}+\left(1+\frac{Q}{2a}\right)C_s\|\Phi\|_n^2\beta;
\end{aligned}
$$

và

$$
\alpha = n-1-\frac{b(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2n};
$$
$$
\beta = \frac{n-1}{n}+\frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}.
$$

Hiển nhiên, ta có $\beta > 0$ và $D > 0$. Bây giờ ta chỉ ra rằng ta có thể chọn a, b, δ sao cho E, B, C dương. Thật vậy, chọn δ và b sao cho

$$
n^2C_s\beta\delta^2 < \frac{n-1}{2}; \tag{2.40}
$$
$$
\frac{b(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2n} < \frac{n-1}{2}. \tag{2.41}
$$

Từ $\delta > \|\Phi\|_n$, các bất đẳng thức (2.40), (2.41) kéo theo $B > 0; C > 0$. Thật vậy,

$$
\begin{aligned}
C =& n-1-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\beta \\
>& n-1-n^2C_s\delta^2\beta > n-1-\frac{n-1}{2} > 0; \\
B =& \alpha-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\beta = n-1-\frac{b(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2n}-n^2C_s\|\Phi\|_n^2\beta \\
>& (n-1)-\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Chọn $0 < a < \frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
E &= Q - 1 - (2p-3)a + B_p(p-1)^2 - \left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Qa}{2}\right) C_s \|\Phi\|_n^2 \beta \\
&> Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2 - \left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right) C_s \delta^2 \beta \\
&> Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2 - \left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right) \frac{n-1}{2n^2} \\
&= -\frac{1}{8n^2}\left\{(n-1)Q^2 - (8n^2 - n + 1)Q - 4n^2\left[2B_p(p-1)^2 - 2p + 1\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Nhận thấy nếu ta chọn Q thỏa mãn

$$(n-1)Q^2 - (8n^2 - n + 1)Q - 4n^2\left[2B_p(p-1)^2 - 2p + 1\right] < 0, \tag{2.42}$$

thì $E > 0$. Ta sẽ chỉ ra trong Nhận xét 2.5.3, rằng Q luôn tồn tại với mọi $p \geq 2$.

Hơn nữa, bằng cách sử dụng định nghĩa của φ trong (2.27), bất đẳng thức (2.39) dẫn đến

$$E \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^{Q-2} |\nabla|\omega||^2 + B \int_{B_{x_0}(r)} |H|^2 |\omega|^Q + C \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q \leq \frac{4D}{r^2} \int_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^Q.$$

Cho $r \to \infty$ và để ý rằng $\int_M |\omega|^Q < \infty$, ta thu được $|\omega| = 0$ trên M, hệ quả là $\omega = 0$. Chúng ta hoàn thành chứng minh Định lí 2.5.10. □

Nhận xét 2.5.3. *Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra với mọi $p \geq 2$, chúng ta có thể giải được bất phương trình bậc hai (2.42) để tìm Q. Tính toán trực tiếp, ta thấy nếu hoặc*

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{n-1} < p < \frac{3}{2} + \frac{(8n^2 - n + 1)^2}{32n^2(n-1)};\\
\frac{8n^2 - n + 1 - \sqrt{\Delta_1}}{2(n-1)} < Q < \frac{8n^2 - n + 1 + \sqrt{\Delta_1}}{2(n-1)},
\end{aligned}$$

ở đó $\Delta_1 = (8n^2 - n + 1)^2 + 16n^2(n-1)(3-2p)$ *hoặc*

$$\begin{aligned}
2 \leq p \leq 1 + \sqrt{n-1};\\
\frac{8n^2 - n + 1 - \sqrt{\Delta_2}}{2(n-1)} < Q < \frac{8n^2 - n + 1 + \sqrt{\Delta_2}}{2(n-1)},
\end{aligned}$$

ở đó $\Delta_2 = (8n^2 - n + 1)^2 + 16n^2(n-1)\left[\frac{2(p-1)^2}{n-1} - 2p + 1\right]$, *thì* (2.42) *thỏa mãn.*

Nhận xét 2.5.4. *Chúng ta có thể xác định rõ ràng δ. Thật vậy, từ*

$$E > Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2 - \left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right) C_s\delta^2\beta > 0,$$

ta có

$$C_s\delta^2 < \frac{Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2}{\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right)\beta} = \frac{Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2}{\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right)\left(\frac{n-1}{n} + \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right)} := f(b).$$

Từ $b \in B_1 = \left(0, \frac{n(n-1)}{(n-2)\sqrt{n^2-n}}\right)$ và $f(b)$ là hàm tăng, ta có

$$\sup_{b\in B_1} f(b) = f\left(\frac{n(n-1)}{(n-2)\sqrt{n^2-n}}\right) = \frac{Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2}{\frac{n^2-2n+2}{2n}\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right)}.$$

Hơn nữa, bất đẳng thức $B > \alpha - n^2C_s\delta^2\beta > 0$ kéo theo

$$C_s\delta^2 < \frac{\alpha}{n^2\beta} = \frac{1}{n^2}\frac{n - 1 - \frac{b(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2n}}{\frac{n-1}{n} + \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}} := g(b).$$

Nhận thấy rằng

$$\sup_{b\in B_1} g(b) = g\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Mặt khác, sử dụng $C > n - 1 - n^2C_s\delta^2\beta > 0$, ta thu được

$$C_s\delta^2 < \frac{n-1}{n^2\beta} = \frac{n-1}{n^2\left(\frac{n-1}{n} + \frac{(n-2)\sqrt{n^2-n}}{2nb}\right)} := h(b).$$

Ta lại có

$$\sup_{b\in B_1} h(b) = h\left(\frac{n(n-1)}{(n-2)\sqrt{n^2-n}}\right) = \frac{2(n-1)}{n(n^2-2n+2)}.$$

Do đó, chúng ta có thể chọn

$$\begin{aligned}\delta &= \min\left\{\sqrt{\frac{Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2}{\frac{n^2-2n+2}{2n}C_s\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right)}}, \sqrt{\frac{1}{n(n-1)C_s}}, \sqrt{\frac{2(n-1)}{n(n^2-2n+2)C_s}}\right\}\\ &= \min\left\{\sqrt{\frac{Q - 1 - \frac{2p-3}{2} + B_p(p-1)^2}{\frac{n^2-2n+2}{2n}C_s\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{4}\right)}}, \sqrt{\frac{1}{n(n-1)C_s}}\right\}.\end{aligned}$$

Khi $p = 2$, chúng ta thu được hệ quả như sau.

Hệ quả 2.5.11. *Cho M là một đa tạp con thực hoàn toàn, không compact, đầy đủ, n chiều ($n \geq 3$) trong $\mathbb{C}P^m$. Gọi Φ là dạng cơ bản thứ hai vết không xác định bởi $\Phi = A - Hg$, ở đó A, H và g lần lượt là dạng cơ bản thứ hai, véc tơ độ cong trung bình và metric cảm sinh trên M. Khi đó, với*

$$\frac{8n^2 - n + 1 - \sqrt{\Delta_2}}{4(n-1)} < k < \frac{8n^2 - n + 1 + \sqrt{\Delta_2}}{4(n-1)},$$

ở đó $\Delta_2 = 64n^4 - 64n^3 + 97n^2 - 2n + 1$, tồn tại một số dương δ sao cho nếu $\|\Phi\|_n < \delta$ thì mọi 1-dạng vi phân L^{2k} điều hòa trên M đều triệt tiêu.

Nhận xét 2.5.5. *Ta nhận thấy nếu $n \leq 7$ thì*

$$\frac{8n^2 - n + 1 - \sqrt{\Delta_2}}{4(n-1)} < \frac{n^2}{n-1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(n-1)}{3n^2}}\right)$$

và

$$\frac{8n^2 - n + 1 + \sqrt{\Delta_2}}{4(n-1)} > \frac{n^2}{n-1}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4(n-1)}{3n^2}}\right),$$

với mọi $n \geq 3$. Do đó, kết quả của chúng tôi có thể coi như một cải tiến của Định lí 3.3 trong [22], đặc biệt khi $n \leq 7$.

Chương 3

ĐỊNH LÍ LIOUVILLE CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương này sẽ trình bày các kết quả mới về định lí Liouville cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann. Chương này được viết dựa trên bài báo [1] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**.

Trong chương này, chúng tôi xét phương trình sau

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0 \tag{3.1}$$

trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$. Nếu $h(v) \equiv 0$ thì v được gọi là p-điều hòa có trọng. Tổng quát, như chúng ta biết tính chính quy của hàm v p-điều hòa có trọng là không tốt hơn $C^{1,\alpha}_{loc}$ (xem [34, 81, 90] và các tài liệu tham khảo trong đó). Hơn nữa, chúng ta cũng biết mọi hàm v là p-điều hòa có trọng phải thỏa mãn $v \in W^{2,2}_{loc}$ (xem [40]). Thực tế, mọi hàm v dương p-điều hòa có trọng không tầm thường trên M là trơn ở ngoài tập $S := \{x \in M : \nabla v(x) = 0\}$ bởi tính chính quy của định lí elliptic (xem [81, 90]).

3.1 Tính chất triệt tiêu cho nghiệm của phương trình loại Lichnerowicz p-Laplace

Trong mục này, chúng tôi sử dụng phương pháp trong bài báo [33, 34] để chứng minh kết quả mới sau đây.

Định lí 3.1.1 (Định lí 1.3.2)**.** *Cho $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact và đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn* *dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, ở đây ρ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ và $\alpha \in (0,1)$, giả sử $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ là một nghiệm dương của phương trình (3.1). Nếu hằng số a thỏa mãn

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và nếu $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ với

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì hàm v là hằng.

Như đã phân tích ở chương **Tổng quan**, khi $h(v) = cv^\sigma$, với $c \leq 0, \sigma \geq 0$, thì phương trình (3.1) trở thành $\Delta_{p,f} v + cv^\sigma = 0$. Đây là phương trình được nghiên cứu bởi L. Zhao trong bài báo [99] (Định lí 0.0.5 ở trên). Trong trường hợp đặc biệt, $\beta = \frac{p}{2}$, kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của L. Zhao.

Để chứng minh Định lí 3.1.1, chúng ta cần bất đẳng thức Kato sau đây.

Bổ đề 3.1.2 ([13]). *Cho v là một hàm trơn trên một đa tạp Riemann n chiều M. Ở ngoài tập kì dị $S = \{x \in M : dv(x) = 0\}$, ta có*

$$|\nabla(|dv|^{p-2}dv)|^2 - |\nabla|dv|^{p-1}|^2 \geq 0$$

với mọi số $p \geq 1$.

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra chứng minh Định lí 3.1.1.

Chứng minh Định lí 3.1.1. Áp dụng công thức Bochner-Weitzenböck cho $|dv|^{p-2}dv$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f(||dv|^{p-2}dv|^2) =& |\nabla(|dv|^{p-2}dv)|^2\\ &- \left\langle (d_f^*d + dd_f^*)|dv|^{p-2}dv, |dv|^{p-2}dv\right\rangle + \mathrm{Ric}_M(|dv|^{p-2}dv, |dv|^{p-2}dv).\end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta thu được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(2|dv|^{p-1}\Delta_f|dv|^{p-1} + 2\left|\nabla|dv|^{p-1}\right|^2\right)\\ &\geq |\nabla(|dv|^{p-2}dv)|^2 - \left\langle (d_f^*d + dd_f^*)|dv|^{p-2}dv, |dv|^{p-2}dv\right\rangle - a\rho(|dv|^{2(p-1)}).\end{aligned}$$

Từ $d_f^*\left(|dv|^{p-2}dv\right) = h(v)$, ta có

$$\begin{aligned}|dv|^{p-2}\Delta_f|dv|^{p-1} \geq & \left|\nabla\left(|dv|^{p-2}dv\right)\right|^2 - \left|\nabla|dv|^{p-1}\right|^2 \\ & - \left\langle d_f^* d\left(|dv|^{p-2}dv\right) + d\left(h(v)\right), |dv|^{p-2}dv\right\rangle - a\rho(|dv|^{2(p-1)}).\end{aligned}$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $|dv|^{p-2}$ và áp dụng Bổ đề 3.1.2, ta có

$$\begin{aligned}& |dv|(\Delta_f + a\rho)|dv|^{p-1} \\ & \geq \frac{1}{|dv|^{p-2}}\left(|\nabla(|dv|^{p-2}dv)|^2 - |\nabla|dv|^{p-1}|\right)^2 - \left\langle d_f^* d(|dv|^{p-2}dv) + d(h(v)), dv\right\rangle \\ & \geq -\left\langle d_f^* d(|dv|^{p-2}dv) + h'(v)dv, dv\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Chọn một số bất kì $q \geq 0$ và một hàm không âm trơn φ với giá compact trong $M_+ := M \setminus S$. Nhân hai vế của bất đẳng thức (3.2) với $|dv|^q\varphi^2$ và lấy tích phân trên M_+ ta có

$$\begin{aligned}\int_{M_+} |dv|^{q+1}\varphi^2\Delta_f|dv|^{p-1}e^{-f} + a\int_{M_+} \rho dv|^{p+q}\varphi^2 e^{-f} & \\ \geq -\int_{M_+} \left\langle d_f^* d(|dv|^{p-2}dv) + h'(v)dv, |dv|^q\varphi^2 dv\right\rangle e^{-f}, &\end{aligned}$$

ở đó $\varphi \in C_0^\infty(M_+) \subset C_0^\infty(M)$. Do đó,

$$\begin{aligned}\int_{M_+} \left\langle \nabla(|dv|^{q+1}\varphi^2), \nabla|dv|^{p-1}\right\rangle e^{-f} - a\int_{M_+} \rho|dv|^{p+q}\varphi^2 e^{-f} & \\ \leq \int_{M_+} \left\langle d(|dv|^{p-2}dv) + h'(v)dv, d(|dv|^q\varphi^2 dv)\right\rangle e^{-f}. &\end{aligned} \tag{3.3}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\int_{M_+} \left\langle \nabla(|dv|^{q+1}\varphi^2), \nabla|dv|^{p-1}\right\rangle e^{-f} = & (q+1)(p-1)\int_{M_+} |dv|^{q+p-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} \\ & + 2(p-1)\int_{M_+} \varphi|dv|^{p+q-1}\left\langle \nabla\varphi, \nabla|dv|\right\rangle e^{-f}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Từ

$$|d(\varphi\omega)| = |d\varphi \wedge \omega| \leq |d\varphi||\omega|,$$

với mọi hàm trơn $\varphi : M \to \mathbb{R}$ và mọi 1-dạng vi phân đóng ω, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{M_+} \left\langle d_f^* d(|dv|^{p-2}dv) + h'(v)dv, |dv|^q\varphi^2 dv \right\rangle e^{-f} \\
&\quad = \int_{M_+} \left\langle d(|dv|^{p-2}dv), d(|dv|^q\varphi^2 dv) \right\rangle e^{-f} + c\int_{M_+} h'(v)|dv|^{q+2}\varphi^2 e^{-f} \\
&\quad \leq \int_{M_+} |\nabla(|dv|^{p-2})| \cdot |dv| \cdot |\nabla(|dv|^q\varphi^2)| \cdot |dv| e^{-f} + c\int_{M_+} h'(v)|dv|^{q+2}\varphi^2 e^{-f} \\
&\quad \leq (p-2)q\int_{M_+} |dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} + 2(p-2)\int_{M_+} |dv|^{p+q-1}\varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|dv|\right\rangle e^{-f}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Bởi giả thiết, ta có bất đẳng thức Poincaré có trọng trên M_+:

$$\int_{M_+} |\nabla\varphi|^2 e^{-f} \geq \int_{M_+} \rho\varphi^2 e^{-f},$$

với mọi $\varphi \in C_0^\infty(M_+)$. Thay thế φ bởi $|dv|^{\frac{p+q}{2}}\varphi$ trong bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\begin{aligned}
\int_{M_+} \rho|dv|^{p+q}\varphi^2 e^{-f} &\leq \int_{M_+} \left|\nabla\left(|dv|^{\frac{p+q}{2}}\varphi\right)\right|^2 e^{-f} \\
&\leq (1+\varepsilon)\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \int_{M_+} |dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} \\
&\quad + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{M_+} |dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 e^{-f}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (3.3), (3.4), (3.5) và (3.6), ta được với mọi $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\left\{p+q-1- \ (1+\varepsilon)a\left(\frac{p+q}{2}\right)^2\right\}\int_{M_+} |dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} \\
&\leq a\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{M_+} |dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 e^{-f} - 2\int_{M_+} \varphi|dv|^{p+q-1} < \nabla\varphi, \nabla|dv| > e^{-f} \\
&\leq a\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{M_+} |dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 e^{-f} + 2\int_{M_+} \varphi|dv|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|dv||e^{-f}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Từ

$$2\varphi|dv|^{p+q-1}|\nabla\varphi||\nabla|dv|| \leq \varepsilon|dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2 + \frac{1}{\varepsilon}|dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2$$

bởi (3.7), ta có

$$C_\varepsilon\int_{M_+} |dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} \leq D_\varepsilon\int_{M_+} |dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 e^{-f}$$

với mọi $\varphi \in C_0^\infty(M_+)$, ở đó

$$C_\varepsilon = p + q - 1 - (1+\varepsilon)a\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \varepsilon$$

và

$$D_\varepsilon = a\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Chọn một giá trị $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ở trên. Khi đó, tồn tại một hằng số dương $C = C(\varepsilon, n, p, q)$ sao cho với mọi $\varphi \in C_0^\infty(M_+)$, ta có

$$\int_{M_+} |dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2\varphi^2 e^{-f} \leq C\int_{M_+} |dv|^{p+q}|\nabla\varphi|^2 e^{-f} \tag{3.8}$$

nếu

$$p + q - 1 - a\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 > 0. \tag{3.9}$$

Đặt $\beta = \frac{p+q}{2} \geq \frac{p}{2}$. Khi đó, bất đẳng thức (3.9) tương đương với điều kiện sau

$$\beta^2 - \frac{2}{a}\beta + \frac{1}{a} < 0. \tag{3.10}$$

Hơn nữa, dễ thấy bất đẳng thức (3.10) thỏa mãn nếu và chỉ nếu giả thiết của a, b và β trong Định lí 3.1.1 được thỏa mãn, tức là,

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

$$1 - a > 0 \quad \text{và} \quad a < \frac{4(p-1)}{p^2}.$$

Do đó $a < \min\left\{1, \frac{4(p-1)}{p^2}\right\} = \frac{4(p-1)}{p^2}$.

Phần còn lại của chứng minh là tương tự như trong [33, 34, 36, 66]. Đầu tiên, bởi một biến phân của phương pháp cut-off Duzaar-Fuchs, ta sẽ chỉ ra bất đẳng thức (3.8) đúng cho mọi $\psi \in C_0^\infty(M)$. Thật vậy, định nghĩa

$$\eta_{\tilde{\epsilon}} = \min\left\{\frac{|dv|}{\tilde{\epsilon}}, 1\right\}$$

với $\tilde{\epsilon} > 0$. Đặt $\varphi_{\tilde{\epsilon}} = \psi^2\eta_{\tilde{\epsilon}}$. Do đó, bởi giả thiết, $\varphi_{\tilde{\epsilon}}$ là một hàm liên tục có giá compact và $\varphi_{\tilde{\epsilon}} = 0$ trên $M \setminus M_+$. Hơn nữa, $\varphi_{\tilde{\epsilon}} \in W_0^{1,2}(M_+)$. Khi $\tilde{\epsilon} \to 0, \eta_{\tilde{\epsilon}} \to 1$ theo từng điểm trong M_+, bằng lập luận tương tự như trong [36, 66], với chú ý dv khả vi ở ngoài $\mathcal{S}$ hầu khắp nơi và $C_0^\infty(M)$ là trù mật trong $C_0^1(M)$, ta có thể thay thế φ bởi $\varphi_{\tilde{\epsilon}}$ trong (3.8) để thu được

$$\int_{M_+} \psi^4(\eta_{\tilde{\epsilon}})^2|dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2e^{-f}$$
$$\leq 6C\int_{M_+}|dv|^{p+q}|\nabla\psi|^2\psi^2(\eta_{\tilde{\epsilon}})^2e^{-f}+3C\int_{M_+}|dv|^{p+q}|\nabla\eta_{\tilde{\epsilon}}|^2\psi^4e^{-f}. \tag{3.11}$$

Để ý rằng

$$\int_{M_+}|dv|^{p+q}|\nabla\eta_{\tilde{\epsilon}}|^2\psi^4e^{-f} \leq \tilde{\epsilon}^{p+q-2}\int_{M_+}|\nabla|dv||^2\psi^4\chi_{\{|dv|\leq\tilde{\epsilon}\}}e^{-f} \tag{3.12}$$

và vế phải của (3.12) triệt tiêu bởi sự hội tụ trội khi $\tilde{\epsilon}\to 0$, $|\nabla|dv||\in L^2_{loc}(M)$. Cho $\tilde{\epsilon}\to 0$ và áp dụng bổ đề Fatou đối với tích phân ở vế trái và sự hội tụ trội đối với tích phân đầu tiên trong vế phải của (3.11), ta thu được

$$\int_{M_+}\psi^4|dv|^{p+q-2}|\nabla|dv||^2e^{-f}\leq 6C\int_{M_+}|dv|^{p+q}|\nabla\psi|^2\psi^2e^{-f}, \tag{3.13}$$

ở đó $\psi\in C_0^\infty(M)$.

Chọn một hàm trơn không âm ψ sao cho

$$\psi=\begin{cases}1 & \text{trên } B_o(R)\\ 0 & \text{trên } M\setminus B_o(2R)\end{cases}$$

và $|\nabla\psi|\leq\frac{2}{R}$. Để ý rằng $\beta=\frac{p+q}{2}$, khi đó, bất đẳng thức (3.13) kéo theo

$$\int_{M_+}|dv|^{2\beta-2}|\nabla|dv||^2e^{-f}\leq\frac{4C}{R^2}\int_{M_+}|dv|^{2\beta}e^{-f}.$$

Cho $R\to\infty$, khi đó với mọi $|dv|\in L^{2\beta}(M)$ ta suy ra $|dv|$ là hằng số trên mỗi thành phần liên thông của M_+. Ta có $dv\in C^0(M)$ và $dv=0$ trên ∂M_+. Do đó, $dv=0$ trên mỗi thành phần liên thông của M_+ nếu $\partial M_+\neq\emptyset$, điều này vô lí. Suy ra $M_+=M$ và do đó $|dv|$ là hằng số khác không trên M. Từ M thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng, M phải có thể tích vô hạn. Từ $|dv|\in L^{2\beta}(M)$, ta có $dv=0$. Khi đó, v là hằng số. Định lí được chứng minh xong. □

3.2 Một số hệ quả

Đặt $h(v)=bv+Av^p+Bv^{-q}$, ở đó $b,A,B\in\mathbb{R}$. Trong bài báo [32], các tác giả N. T. Dũng - N. N. Khanh - Q. A. Ngô đưa ra một tính chất Liouville cho nghiệm trơn của phương trình nhiệt

$$v_t=\Delta_f v+h(v)$$

nếu $b \leq 0, A \leq 0, p \geq 1, B \geq 0, q \geq 0$ và $v(x,t)$ có độ tăng $o(e^{dist(x_0,x)+\sqrt{|t|}})$. Từ Định lí 3.1.1, chúng tôi thu được một kết quả Liouville như sau.

Hệ quả 3.2.1. *Cho $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact, đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, ở đó ρ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ và $\alpha \in (0,1)$, giả sử $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ là một nghiệm dương của phương trình

$$\Delta_{p,f} v + bv + Av^p + Bv^{-q} = 0$$

ở đó $b \leq 0, A \leq 0, p \geq 1, B \geq 0, q \geq 0$ là các số thực. Nếu hằng số a thỏa mãn

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và nếu $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ với

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì hàm v là hằng số.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ Định lí 3.1.1 bởi $h'(v) \leq 0$. □

Nếu $h(v) = Ae^{2v} + Be^{-2v} + D$, chúng ta xét phương trình loại ràng buộc Hamilton trên đa tạp Riemann 2 chiều M có dạng sau

$$\Delta_{p,f} v + Ae^{2v} + Be^{-2v} + D = 0. \tag{3.14}$$

Khi $p = 2, f$ là hằng số, phương trình này trở thành phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng, phương trình mà lúc đầu xuất phát từ lí thuyết hấp dẫn. Nếu $A \leq 0, B \geq 0$ và D là các số thực bất kì thì $h'(v) \leq 0$. Từ Định lí 3.1.1, chúng tôi thu được một định lí dạng Liouville như sau.

Hệ quả 3.2.2. *Cho $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact, đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, ở đó ρ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ và $\alpha \in (0,1)$, giả sử $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ là một nghiệm dương của phương trình

$$\Delta_{p,f} v + Ae^{2v} + Be^{-2v} + D = 0$$

ở đó $A \leq 0, B \geq 0$ và D là các số thực bất kì. Nếu hằng số a thỏa mãn

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ với

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì v là hằng số.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra từ Định lí 3.1.1 bởi ta có $h'(v) \leq 0$. □

Chương 4

ƯỚC LƯỢNG GRADIENT CHO PHƯƠNG TRÌNH P-LAPLACE CÓ TRỌNG TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương này sẽ trình bày các kết quả mới về ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Chương này được viết dựa trên bài báo [2] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**.

Từ các kết quả Liouville cho toán tử p-Laplace thu được bởi L. Zhao và D. Yang trong [102], bởi S. B. Hou trong [45], chúng tôi mong muốn đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0 \tag{4.1}$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, ở đó F là một hàm khả vi, $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Nhắc lại, đặt $h(v) = (p-1)^{p-1} e^{-v} F(e^{\frac{v}{p-1}})$, chúng ta giả sử thêm $h'(v) \leq a := a(p)$ với hằng số nào đó $a \geq 0$, ở đó $a = 0$ nếu $p \neq 2$. Chúng ta nói *một bất đẳng thức Sobolev có trọng* đúng trên M nếu tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, C_3, chỉ phụ thuộc vào m, sao cho với mọi quả cầu $B_o(R) \subset M$, mọi hàm $\phi \in C_0^\infty(B_o(R))$ ta có

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} e^{-f} d\mu \right)^{\frac{m-2}{m}} \leq C_1 e^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} \int_{B_o(R)} (R^2 |\nabla \phi|^2 + \phi^2) e^{-f} d\mu, \tag{4.2}$$

ở đó V là thể tích của quả cầu trắc địa $B_o(R)$.

4.1 Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng

Kết quả chính trong phần này như sau.

Định lí 4.1.1 (Định lí 1.4.2). *Cho $(M, g, e^{-f} d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn mà trên đó có bất đẳng thức Sobolev (4.2). Giả sử u là một nghiệm dương* *của* (4.1) *trên quả cầu trắc địa* $B_o(R) \subset M$ *và* $F(u) \geq 0$ *khi* $u \geq 0, h'(v) \leq a = a(p)$ *với hằng số nào đó* $a \geq 0$*, ở đó* $a = a(p) = 0$ *nếu* $p \neq 2$*. Với bất kì* $\eta > 0, q > \frac{n}{2}$*, tồn tại* $b > 0$ *sao cho nếu* $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{1}{bR^2}$ *và* $k(q,1) \leq \frac{1}{b}$ *thì tồn tại một hằng số* $C_{p,m,V}$ *chỉ phụ thuộc vào* p, m *và* V *sao cho*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V}\frac{1+\sqrt{K}R}{R} + \eta, \tag{4.3}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$*. Hơn nữa, nếu* $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} = 0$ *thì*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m}\frac{1+\sqrt{K}R}{R}, \tag{4.4}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$ *và* $C_{p,m}$ *chỉ phụ thuộc vào* p *và* m*.*

Từ phương trình (4.1) có thể hoặc suy biến hoặc kì dị trong tập hợp $\{\nabla u = 0\}$, lí thuyết chính quy elliptic có thể không được áp dụng. Chúng ta biết rằng tính chất chính quy tốt nhất của nghiệm của loại phương trình này là $C^{1,\alpha}$, với $0 < \alpha < 1$ nào đó. Giống như trong [102] (xem thêm [42, 90]), sử dụng một kĩ thuật ε-chính quy hóa bằng cách thay thế toán tử tuyến tính hóa $\mathcal{L}_f$ (xem định nghĩa dưới đây) với xấp xỉ của nó, chúng ta có thể giả sử rằng u là trơn. Do đó, trong phần này, để cho đơn giản chúng ta giả sử u là một $\mathcal{C}^2$-nghiệm dương của (4.1). Đặt

$$v = (p-1)\log u, \quad w = |\nabla v|^2.$$

Để chứng minh Định lí 4.1.1, chúng ta cần sử dụng toán tử sau đây.

Định nghĩa 4.1.2 ([89, 90])**.** *Toán tử tuyến tính hóa của toán tử* p*-Laplace có trọng tương ứng với* $u \in \mathcal{C}^2(M)$ *sao cho* $\nabla u \neq 0$ *được định nghĩa như sau*

$$\mathcal{L}_f(\psi) = e^f \mathrm{div}(e^{-f}|\nabla u|^{p-2}A(\nabla\psi)),$$

ở đó ψ *là một hàm trơn trên* M *và* A *là một tensor xác định bởi*

$$A = \mathrm{Id} + (p-2)\frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}.$$

Bổ đề 4.1.3 ([89])**.** *Cho* $(M, g, e^{-f}d\mu)$ *là một không gian độ đo metric trơn và hàm* $u \in \mathcal{C}^3(M)$*. Khi đó, nếu* $|\nabla u| \neq 0$ *thì*

$$\mathcal{L}_f(|\nabla u|^p) = p|\nabla u|^{2p-4}\left(|\mathrm{Hess} u|_A^2 + \mathrm{Ric}_f(\nabla u, \nabla u)\right) + p|\nabla u|^{p-2}\left\langle \nabla u, \nabla\Delta_{p,f}u\right\rangle,$$

ở đó $|\mathrm{Hess} u|_A^2 = A^{ik}A^{jl}u_{ij}u_{kl}$ *và* A *được xác định như trên.*

Để ước lượng số hạng chứa Hessian, chúng ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.4. *Cho* $v = (p-1)\log u, w = |\nabla v|^2$ *và* $\alpha = \min\left\{2(p-1), \frac{m(p-1)^2}{m-1}\right\}$, *đặt*

$$h(v) = (p-1)^{p-1}e^{-v}F(e^{\frac{v}{p-1}}).$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}v|_A^2 \geq & \frac{\alpha}{4}\frac{|\nabla w|^2}{w} + \frac{w^2}{m-1}(1+hw^{\frac{-p}{2}})^2 \\ & + \frac{p-1}{m-1}(1+hw^{\frac{-p}{2}})\langle \nabla v, \nabla w\rangle - \frac{(f_1v_1)^2}{m-n}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Thay v vào phương trình (4.1), chúng ta thu được

$$\begin{aligned}0 = \Delta_{p,f}u + F(u) &= e^f\mathrm{div}(e^{-f}|\nabla e^{\frac{v}{p-1}}|^{p-2}\nabla e^{\frac{v}{p-1}}) + F(e^{\frac{v}{p-1}}) \\ &= (p-1)^{1-p}e^v(|\nabla v|^p + \Delta_{p,f}v) + F(e^{\frac{v}{p-1}}).\end{aligned}$$

Do đó

$$\Delta_{p,f}v = -(p-1)^{p-1}e^{-v}F(e^{\frac{v}{p-1}}) - |\nabla v|^p = -h(v) - w^{\frac{p}{2}}. \tag{4.5}$$

Theo định nghĩa của toán tử p-Laplace có trọng, ta có

$$w^{\frac{p-2}{2}}\Delta_{p,f}v + \frac{p-2}{2}\langle \nabla w, \nabla v\rangle w^{\frac{p-4}{2}} = -h - w^{\frac{p}{2}}. \tag{4.6}$$

Chúng ta cần ước lượng $|\mathrm{Hess}v|_A^2$ tại các điểm ở đó $w > 0$. Chọn một cơ sở trực chuẩn địa phương $\{e_i\}_{i=1}^n$ gần một điểm cho trước sao cho $\nabla v = |\nabla v|e_1$. Chúng ta sử dụng $\nabla_{e_i}w = w_i,\ i = 1, \cdots, n$, khi đó $w = v_1^2, w_1 = 2v_{i1}v_i = 2v_{11}v_1$, ở đó $j \geq 2, w_j = 2v_{j1}v_1$. Do đó, $2v_{j1} = \dfrac{w_j}{w^{\frac{1}{2}}}$, $\langle \nabla f, \nabla v\rangle = f_1v_1$. Vì vậy (4.6) dẫn đến

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^n v_{jj} &= -hw^{1-\frac{p}{2}} - (\frac{p}{2}-1)\frac{w_1v_1}{w} - v_{11} + f_1v_1 - w \\ &= -hw^{1-\frac{p}{2}} - (p-1)v_{11} + f_1v_1 - w.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Từ định nghĩa của ma trận A, ta có

$$|\mathrm{Hess}v|_A^2 = |\mathrm{Hess}v|^2 + \frac{(p-2)^2}{4w^2}\langle \nabla v, \nabla w\rangle^2 + \frac{p-2}{2w}|\nabla w|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess} v|_A^2 =& \sum_{i,k=1}^{n} v_{ij} + (p-2)^2 v_{11}^2 + 2(p-2)\sum_{k=1}^{n} v_{1k}^2\\ =&(p-1)^2 v_{11}^2 + 2(p-1)\sum_{k=2}^{n} v_{1k}^2 + \sum_{i,k=2}^{n} v_{ik}^2\\ \geq&(p-1)^2 v_{11}^2 + 2(p-1)\sum_{k=2}^{n} v_{1k}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n} v_{jj}\right)^2.\end{aligned}$$

Thay (4.7) vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess} v|_A^2 \geq&(p-1)^2 v_{11}^2 + 2(p-1)\sum_{k=2}^{n} v_{1k}^2\\ &+\frac{1}{n-1}(-hw^{1-\frac{p}{2}} - (p-1)v_{11} + f_1 v_1 - w)^2.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $(x-y)^2 \geq \frac{x^2}{1+\delta} - \frac{y^2}{\delta}$ với $x = hw^{1-\frac{p}{2}} + w + (p-1)v_{11}$, $y = f_1 v_{11}$, ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n-1}(-hw^{1-\frac{p}{2}} - (p-1)v_{11} + f_1 v_1 - w)^2\\ &\geq \frac{(hw^{1-\frac{p}{2}} + w)^2 + 2(p-1)v_{11}(hw^{1-\frac{p}{2}} + w)}{m-1} + \frac{(p-1)^2}{m-1} v_{11}^2 - \frac{(f_1 v_1)^2}{m-n}.\end{aligned}$$

Kí hiệu $\alpha = \min\left\{2(p-1), \frac{m(p-1)^2}{m-1}\right\}$, ta thu được

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess} v|_A^2 \geq&\alpha\sum_{k=1}^{n} v_{1k}^2 + \frac{1}{m-1}(hw^{1-\frac{p}{2}} + w)^2\\ &+\frac{2(p-1)v_{11}}{m-1}(hw^{1-\frac{p}{2}} + w) - \frac{(f_1 v_1)^2}{m-n}.\end{aligned}$$

Để ý rằng

$$2wv_{11} = \langle \nabla v, \nabla w \rangle, \sum_{j=1}^{n} v_{1j}^2 = \frac{1}{4}\frac{|\nabla w|^2}{w}.$$

Thay các đồng nhất thức này vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess} v|_A^2 \geq&\frac{\alpha}{4}\frac{|\nabla w|^2}{w} + \frac{w^2}{m-1}(1 + hw^{\frac{-p}{2}})^2\\ &+\frac{p-1}{m-1}(1 + hw^{\frac{-p}{2}})\langle \nabla v, \nabla w \rangle - \frac{(f_1 v_1)^2}{m-n}.\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh xong. □

Bây giờ chúng ta ước lượng $\mathcal{L}_f(Q)$, với $Q = |\nabla v|^p$. Từ (4.5), ta thu được

$$\nabla \Delta_{p,f} v = -h'(v)\nabla v - \nabla(|\nabla v|^p).$$

Kết hợp đồng nhất thức này với Bổ đề 4.1.3, ta có

$$\mathcal{L}_f(Q) = pw^{p-2}\left(|\mathrm{Hess} v|_A^2 + \mathrm{Ric}_f(\nabla v, \nabla v)\right) - pw^{\frac{p-2}{2}}\langle \nabla v, \nabla Q\rangle - ph'(v)w^{\frac{p}{2}-1}|\nabla v|^2.$$

Sử dụng Bổ đề 4.1.4 và để ý rằng $h'(v) \le a$ trong phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(Q) =& \mathcal{L}_f(w^{\frac{p}{2}})\\ \ge& pw^{p-2}\left(\frac{\alpha}{4}\frac{|\nabla w|^2}{w} + \frac{1}{m-1}w^2(1+hw^{\frac{-p}{2}})^2 + \frac{p-1}{m-1}(1+hw^{\frac{-p}{2}})\langle\nabla v, \nabla w\rangle\right)\\ &+ pw^{p-2}\mathrm{Ric}_f^m(\nabla v, \nabla v) - pw^{\frac{p-2}{2}}\left\langle \nabla v, \nabla w^{\frac{p}{2}}\right\rangle - paw^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(Q) \ge& \frac{\alpha p}{4}w^{p-3}|\nabla w|^2 + \frac{p}{m-1}w^p(1+hw^{\frac{-p}{2}})^2\\ &+\left(\frac{p(p-1)}{m-1}(1+hw^{\frac{-p}{2}}) - \frac{p^2}{2}\right)w^{p-2}\langle\nabla v, \nabla w\rangle + p\mathrm{Ric}_f^m(\nabla v, \nabla v)w^{p-2} - apw^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

Để ý rằng bất đẳng thức trên đúng khi $w > 0$. Đặt $\mathcal{S} = \{x \in M : w(x) = 0\}$. Trong phần cuối của mục này, phép lấy tích phân được lấy tương ứng với $e^{-f}d\mu$. Hơn nữa, chúng ta bỏ qua kí hiệu $e^{-f}d\mu$ cho đơn giản. Lấy tích phân hai vế bất đẳng thức trên và sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_\Omega \mathcal{L}_f(Q)\psi =& -\int_\Omega \left\langle \frac{1}{2}w^{p-2}\nabla w + \frac{1}{2}(p-2)w^{p-3}\langle\nabla v, \nabla w\rangle\nabla v, \nabla\psi\right\rangle\\ \ge& \int_\Omega\left(\frac{\alpha}{4}w^{p-3}|\nabla w|^2 + \frac{1}{m-1}w^p(1+hw^{\frac{-p}{2}})^2 - apw^{\frac{p}{2}}\right.\\ &\left.+\left(\frac{p-1}{m-1}(1+hw^{\frac{-p}{2}}) - \frac{p}{2}\right)w^{p-2}\langle\nabla v, \nabla w\rangle + \mathrm{Ric}_f^m(\nabla v, \nabla v)w^{p-2}\right)\psi.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ở đây chúng ta sử dụng

$$A(\nabla Q) = \frac{p}{2}w^{\frac{p-2}{2}}\nabla w + \frac{1}{2}p(p-2)w^{\frac{p-4}{2}}\langle\nabla v, \nabla w\rangle\nabla v.$$

Bây giờ chúng ta giả sử rằng M thỏa mãn bất đẳng thức Sobolev có trọng (4.2). Sử dụng bất đẳng thức Sobolev và bất đẳng thức (4.8), ta có thể chứng minh kết quả sau, đây là một bước quan trọng trong chứng minh Định lí 4.1.1.

Bổ đề 4.1.5 (Ước lượng $\mathbf{L}^{\mathbf{q}}$-chuẩn)**.** *Với giả thiết như trong Định lí 4.1.1, nếu $b_0 > 0$ đủ lớn thì tồn tại $d_1(p, m) > 0$ sao cho*

$$\| w \|_{L^{(b_0+p-1)\frac{m}{m-2}}(B_o(\frac{3}{4}R))} \leq d_1 \frac{b_0^2}{R^2} V^{\frac{m-2}{m(b_0+p-1)}}.$$

Chứng minh. Ta chọn $\psi = w_\epsilon^b \eta^2$, ở đó $\epsilon > 0$, $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(B_o(R))$ và $w_\epsilon = (w-\epsilon)^+$. Thay ψ vào (4.8), chúng ta thu được một bất đẳng thức tương tự như bất đẳng thức (2.3) trong [102]. Do đó, chúng ta có thể sử dụng lập luận tương tự như trong [102], sau khi cho ϵ tiến về 0 và thực hiện một vài tính toán, ta thu được (xem kết luận trước Bổ đề 2.2 trong [102])

$$\begin{aligned}
&\int_{B_o(R)} \left|\nabla \left(w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta\right)\right|^2 + bd_1 \int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2 \\
\leq & a_0 \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 - bd_2 \int_{B_o(R)} \mathrm{Ric}_f^m(\nabla v, \nabla v) w^{p+b-2}\eta^2 \\
&+ bad_3 \int_{B_o(R)} w^{\frac{p}{2}+b}\eta^2,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

với các hằng số dương $a_0, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}^+$ nào đó và $b \cong \frac{1}{m-1}$. Từ giờ trở đi, $a_0, a_1, a_2, ...$ và $d_1, d_2, ...$ là các hệ số chỉ phụ thuộc vào p và m. Bây giờ ta ước lượng số hạng Ricci. Bởi bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{B_o(R)} \mathrm{Ric}_f^m(\nabla v, \nabla v) w^{p+b-2}\eta^2 \\
&\geq (n-1)K \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2 - \int_{B_o(R)} |(\mathrm{Ric}_f^m)_-^K| w^{p+b-1}\eta^2 \\
&\geq (n-1)K \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2 - \|(\mathrm{Ric}_f^m)_-^K\|^q \left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)^{q/(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Bây giờ chúng ta sử dụng một kĩ thuật trong [26] như sau. Đặt $\alpha = \frac{2q-n}{2(q-1)}$ và $\theta = \frac{m}{m-2}$ thì

$$\alpha + (1-\alpha)\theta = \frac{q}{q-1}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)^{q/(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2\right)^{\frac{q-1}{q}\alpha} \cdot \left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)^{\theta}\right)^{(1-\alpha)\frac{q-1}{q}} \\
&\leq \varepsilon \left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} + \varepsilon^{-\frac{(1-\alpha)\theta}{\alpha}} \cdot \left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)\right),
\end{aligned}$$

ở đó trong bất đẳng thức cuối cùng, ta sử dụng bất đẳng thức Young

$$xy \leq \varepsilon x^{\gamma} + \varepsilon^{-\frac{\gamma^*}{\gamma}} y^{\gamma^*}, \ \forall x, y \geq 0, \gamma > 1, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^*} = 1.$$

Từ (4.2), ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)^{q/(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq \varepsilon C_1 e^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} \int_{B_o(R)} \left(R^2 \left|\nabla \left(w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta\right)\right|^2 + w^{p+b-1}\eta^2\right) \\
&\qquad + \varepsilon^{-\frac{(1-\alpha)\theta}{\alpha}} \cdot \left(\int_{B_o(R)} (w^{p+b-1}\eta^2)\right). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Kết hợp (4.9)-(4.11) và chọn $\varepsilon = \frac{1}{2bd_1(C_1 e^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} R^2)\|(\mathrm{Ric}_f^m)_-^K\|}$, ta kết luận rằng

$$\begin{aligned}
&\int_{B_o(R)} \left|\nabla \left(w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta\right)\right|^2 + bd_1 \int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2 \\
&\quad \leq a_0 \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 - (n-1)bd_2 K \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2 \\
&\quad\quad + bad_3 \int_{B_o(R)} w^{\frac{p}{2}+b}\eta^2 + d_4(be^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} R^2 \|(\mathrm{Ric}_m^f)_-^K\|)^{\frac{n}{2q-n}} \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2.
\end{aligned}$$

Từ

$$a = \begin{cases} 0, & \text{nếu } p \neq 2 \\ \geq 0, & \text{nếu } p = 2 \end{cases}, \quad \|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{c}{be^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} R^2}, \qquad (4.12)$$

và $\frac{p}{2} + b = p + b - 1$ khi $p = 2$, bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\int_{B_o(R)} \left|\nabla \left(w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta\right)\right|^2 + bd_1 \int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2 \\
&\quad \leq a_1 \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 + Kbd_3 \int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức này với bất đẳng thức Sobolev (4.2), ta thu được

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_o(R)} (w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta)^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} + bd_1R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2\\
\leq& d_2R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2\\
&+ Kbd_3R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} p(m-1)w^{p+b-1}\eta^2 + e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2\\
\leq& d_2R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 + a_1b_0b^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ở đó $b_0 = c_1(m,p)(1+\sqrt{K}R)$ với c_1 đủ lớn. Chọn $\eta_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ thoả mãn $0 \leq \eta_1 \leq 1$, $\eta_1 \equiv 1$ trên $B_o(\frac{3}{4}R)$, $|\nabla\eta_1| \leq \dfrac{C_1}{R}$ và đặt $\eta = \eta_1^{p+b}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
d_2R^2\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 &\leq a_2b^2\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^{\frac{2(p+b-1)}{p+b}}\\
&\leq a_2b^2\left(\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2\right)^{\frac{p+b-1}{p+b}} V^{\frac{1}{p+b}}\\
&\leq \frac{bd_1}{2}R^2\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2 + \left(\frac{a_3}{R^2}\right)^{p+b-1} b^{p+b+1}V,
\end{aligned}$$

ở đó ta sử dụng bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Young trong hai bất đẳng thức cuối. Đặt $b = b_0$, điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
d_2R^2e^{c_2b_0}V^{\frac{-2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}|\nabla\eta|^2 \leq& \frac{bd_1}{2}R^2e^{c_2b_0}V^{\frac{-2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2\\
&+ \left(\frac{a_3}{R^2}\right)^{p+b-1} b^{p+b+1}e^{c_2b_0}V^{1-\frac{2}{m}}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Chúng ta ước lượng số hạng thứ hai trong vế phải của (4.14). Ta nhận thấy rằng $a_1b_0^2bw^{p+b-1} < \frac{1}{2}bd_1R^2w^{p+b}$ ở đó $w > a_5b_0^2R^{-2}$. Do đó, để ước lượng số hạng này, ta chia $B_o(R)$ thành hai miền B_1 và B_2 sao cho

$$w\mid_{B_1} > a_5b_0^2R^{-2}; \quad w\mid_{B_2} \leq a_5b_0^2R^{-2}.$$

Từ $0 \leq \eta \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
&a_1b_0^2be^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b-1}\eta^2\\
\leq& \frac{1}{2}bd_1R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_1} w^{p+b}\eta^2 + a_1b_0^2be^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_2}\left(\frac{a_5b_0^2}{R^2}\right)^{p+b-1}\\
\leq& \frac{1}{2}bd_1R^2e^{c_2b_0}V^{-\frac{2}{m}}\int_{B_o(R)} w^{p+b}\eta^2 + \left(\frac{a_6b_0^2}{R^2}\right)^{p+b_0-1} V^{1-\frac{2}{m}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Thay thế (4.15), (4.16) vào (4.14), ta thu được

$$\left(\int_{B_o(R)} (w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta)^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leq \left(\frac{a_7}{R^2}b_0^2\right)^{p+b_0-1} V^{1-\frac{2}{m}}.$$

Như một hệ quả, điều này kéo theo

$$\| \, w \, \|_{L^{(b_0+p-1)\frac{m}{m-2}}(B_o(\frac{3}{4}R))} \leq d_4\frac{b_0^2}{R^2}V^{\frac{m-2}{m(b_0+p-1)}}.$$

Bổ đề chứng minh xong. $\square$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Định lí 4.1.1.

Chứng minh Định lí 4.1.1. Nhận thấy rằng $\lim_{b\to\infty}\|w\|_{L^b(B_o(3R/4))} = \|w\|_{L^\infty(B_o(3R/4))}$, với mọi $\eta > 0$, tồn tại $\bar{b} > 0$, sao cho với mọi $b \geq \bar{b}$, ta có

$$\|w\|_{L^\infty(B_o(3R/4))} \leq \|w\|_{L^b(B_o(3R/4))} + \eta.$$

Đặt $b = b_0$ và chọn $b_0 \geq \bar{b}$ sao cho (4.12) đúng. Khi đó, kết luận đầu tiên thu được bởi Bổ đề 4.1.5.

Giờ chúng ta giả sử $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} = 0$, điều này nghĩa là (4.12) đúng với mọi b đủ lớn. Do đó bất đẳng thức (4.14) đúng với b đủ lớn bất kì. Do đó, kết luận cuối có thể kiểm tra bằng phép lặp Moser tiêu chuẩn (xem [29, 90, 102]). Để ý rằng trong chứng minh Bổ đề 4.1.5, chúng ta đã có bất đẳng thức (4.14). Từ số hạng thứ hai trong vế trái của (4.14) là không âm, ta có

$$\left(\int_{B_o(R)} (w^{\frac{p+b-1}{2}}\eta)^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leq a_8 e^{c_2 b_0} V^{-\frac{2}{m}} \int_{B_o(R)} (bR^2|\nabla\eta|^2 + b_0^2 b^2\eta^2) w^{p+b-1}.$$

Để sử dụng lặp Moser, ta đặt

$$b_{\ell+1} = b_\ell\frac{m}{m-2}, \qquad b_1 = (b_0+p-1)\frac{m}{m-2}, \qquad \Omega_\ell = B_o\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{4^\ell}\right), \qquad \ell = 1, 2...$$

và chọn $\eta_\ell \in C_0^\infty(\Omega_\ell)$ sao cho

$$\eta_\ell \equiv 1 \text{ trên } \Omega_{\ell+1}, \quad \eta_\ell \equiv 0 \text{ trên } B_o(R)\setminus\Omega_\ell, \quad |\nabla\eta_\ell| \leq \frac{C4^\ell}{R}, \quad 0 \leq \eta_\ell \leq 1.$$

Với cách chọn trên và để ý $b = b_0$, ta có

$$\left(\int_{\Omega_{\ell+1}} w^{b_{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{b_{\ell+1}}} \leq \left(a_8 e^{c_2 b_0} V^{-\frac{2}{m}}\right)^{\frac{1}{b_\ell}} \left(\int_{\Omega_\ell} (b_0^2 b^2 + bR^2|\nabla\eta|^2) w^{b_\ell}\right)^{\frac{1}{b_\ell}}.$$

Suy ra

$$\| w \|_{L^\infty(B_o(\frac{R}{2}))} \leq \left(a_8 e^{c_2 b_0} V^{-\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2b_1}} 17^{\frac{m^2}{4b_1}} (b_0 b)^{\frac{m}{b_1}} \| w \|_{L^{b_1}(B_o(\frac{3R}{4}))} .$$

Điều này cùng với Bổ đề 4.1.5 dẫn đến

$$\| w \|_{L^\infty(B_o(\frac{R}{2}))} \leq a_9 \left(\frac{b_0}{R}\right)^2 .$$

Từ $b_0 = c_1(1 + \sqrt{K}R)$, ta có

$$\| w \|_{L^\infty(B_o(\frac{R}{2}))} \leq a_{10} \left(\frac{1 + \sqrt{K}R}{R}\right)^2 .$$

Từ $w = \left(\frac{|\nabla u|}{u}(p-1)\right)^2$, ta kết thúc chứng minh định lí. $\square$

Nhận xét 4.1.1. *Nếu $k(q, 1) \neq 0$ thì điều kiện (4.12) không thể thỏa mãn với b đủ lớn. Do đó, phép lặp Moser không thể áp dụng trong trường hợp này. Điều này giải thích vì sao chúng ta cần thêm hằng số $\eta > 0$ trong vế phải của (4.3).*

4.2 Các định lí Liouville và ước lượng gradient địa phương

Bây giờ kết hợp Định lí 4.1.1 và bổ đề sau, ta thu được một ứng dụng của Định lí 4.1.1.

Bổ đề 4.2.1 (Xem [29, 102]). *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn n chiều. Giả sử $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, ở đó K là một hằng số không âm, $m > n \geq 2$. Khi đó, tồn tại một hằng số C, chỉ phụ thuộc vào m, sao cho với mọi quả cầu $B_o(R) \subset M$, mọi hàm $\phi \in C_0^\infty(B_o(R))$ ta có*

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} e^{-f} d\mu\right)^{\frac{m-2}{m}} \leq e^{C(1+\sqrt{K}R)} V^{-\frac{2}{m}} \int_{B_o(R)} (R^2|\nabla\phi|^2 + \phi^2) e^{-f} d\mu,$$

ở đó V là thể tích của quả cầu trắc địa $B_o(R)$.

Để ý rằng khi $F(u) = cu^\sigma$, với $c \geq 0$ nào đó và $0 \leq \sigma \leq p-1, p > 1$, ta có $h(v) = c(p-1)^{p-1} e^{\left(\frac{\sigma}{p-1}-1\right)v}$. Do đó

$$h'(v) = c(p-1)^{p-1} \left(\frac{\sigma}{p-1} - 1\right) e^{\left(\frac{\sigma}{p-1}-1\right)v} \leq 0.$$

Vì vậy, với $K = 0$, cho R tiến về vô cùng trong (4.4), ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 4.2.2. *Cho* $(M, g, e^{-f}d\mu)$ *là một không gian độ đo metric trơn với* $Ric_f^m \geq 0$. *Nếu* u *là một nghiệm dương của phương trình* $\Delta_{p,f}u + cu^\sigma = 0$ *và xác định trên toàn bộ không gian thì* u *là hằng số.*

Hệ quả này cải tiến kết quả của L. Zhao và D. Yang trong [102]. Thực tế, trong Định lí 1.1 của bài báo [102], các tác giả chứng minh rằng

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq \frac{(1+\sqrt{K}R)^{3/4}}{R}$$

nếu $\mathrm{Ric}_f^m \geq -(n-1)K$, với $K \geq 0$. Tuy nhiên, ước lượng trên nên được sửa như (4.4).

Bây giờ chúng ta xét phương trình Allen-Cahn. Phương trình này có nguồn gốc từ lí thuyết gradient của sự chuyển pha [1] và sự liên quan mật thiết đến lí thuyết mặt cực tiểu (xem [21, 70, 74]). Ước lượng gradient của chúng tôi được phát biểu như sau.

Hệ quả 4.2.3. *Cho* $(M, g, e^{-f}d\mu)$ *là một không gian độ đo metric trơn với* $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, K *là một hằng số không âm. Nếu* u *là một nghiệm của phương trình*

$$\Delta_{p,f}u + u(1-u^2) = 0, \quad p \geq 2,$$

thỏa mãn $0 < u \leq 1$ *trên quả cầu* $B_o(R) \subset M$ *thì*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m}\frac{1+\sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu $B_o(\frac{R}{2})$, *ở đó* $C_{p,m}$ *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* p *và* m. *Đặc biệt, khi* $K = 0$, *nếu* $0 < u \leq 1$ *trong* M *thì* $u \equiv 1$ *trên* M.

Chú ý rằng khi $p = 2$, dạng định lí Liouville này được nghiên cứu bởi S. B. Hou trong [45]. Hệ quả này có thể xem như một tổng quát của kết quả ở trong [45] trong trường hợp không tuyến tính. Cũng cần nhấn mạnh là ước lượng gradient trên là mới, ngay cả khi $p = 2$.

Nhắc lại rằng $h(v) = (p-1)^{p-1}e^{-v}F(e^{\frac{v}{p-1}})$. Do đó

$$h'(v) = (p-1)^{p-1}e^{-v}\left[\frac{F'(e^{v/(p-1)})e^{v/(p-1)}}{p-1} - F(e^{v/(p-1)})\right].$$

Bây giờ chúng ta chứng minh Hệ quả 4.2.3.

Chứng minh Hệ quả 4.2.3. Với $F(u) = u(1-u^2)$ thì $F'(u) = 1 - 3u^2$. Dễ thấy với $0 < u \le 1, p \ge 2$ thì $v = \log u \le 0$, hệ quả là $0 < e^{v/(p-1)} \le 1$. Do đó, nếu $0 < u \le 1$ thì

$$\begin{aligned}\frac{F'(u)u}{p-1} - F(u) &= \frac{(1-3u^2)u}{p-1} - u(1-u^2)\\ &= \frac{u}{p-1}((p-4)u^2 - (p-2)) \le 0.\end{aligned}$$

Vì vậy, $h'(v) \le 0$, giả thiết của Định lí 4.1.1 thỏa mãn. Do đó, ta có (4.4). Khi $K = 0$, điều này kéo theo

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \frac{C_{p,m}}{R}.$$

Cho $R \to +\infty$, từ $u > 0$ ta có $\nabla u = 0$, do đó u là hằng số trên M. Điều này dẫn đến $\Delta_{p,f} u = 0$, hệ quả là $u(1-u^2) = 0$. Sử dụng điều kiện $0 < u \le 1$, ta kết luận $u \equiv 1$ trên M. Hệ quả chứng minh xong. $\square$

Ứng dụng tiếp theo là một ước lượng gradient mới cho phương trình Fisher-KPP.

Hệ quả 4.2.4. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \ge -(m-1)K$, hằng số $K \ge 0$. Nếu u là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_{p,f} u + cu(1-u) = 0, \quad p \ge 2, c > 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$, $u \le 1$ trong M thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le C_{p,m} \frac{1+\sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m}$ chỉ phụ thuộc vào p và m. Khi $K = 0$ thì $u \equiv 1$ trên M.

Phương trình trong Hệ quả 4.2.4 được đề xuất bởi Fisher vào năm 1937 để mô tả sự lan truyền của một gen tiến hóa có lợi trong một cộng đồng [37] và cũng được mô tả độc lập trong một bài báo có tính ảnh hưởng về sau của Kolmogorov, Petrovskiis và Piskunov [46]. Trong [14], các tác giả thu được ước lượng Harnack vi phân cho nghiệm dương của phương trình này.

Chứng minh Hệ quả 4.2.4. Theo giả thiết ta có $F(u) = cu(1-u) = cu - cu^2$. Do đó, với $0 < u \le 1, p \ge 2$ thì

$$\begin{aligned}\frac{F'(u)u}{p-1} - F(u) &= \frac{(c-2cu)u}{p-1} - cu - cu^2\\ &= \frac{cu}{p-1}((p-3)u - (p-2)) \le 0.\end{aligned}$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ Định lí 4.1.1. $\square$

Ứng dụng thứ tư của định lí chính là kết quả Liouville dưới đây.

Hệ quả 4.2.5. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, $K \geq 0$. Nếu $u \geq 1$ là một nghiệm của phương trình*

$$\Delta_f u + alogu = 0, \quad a \geq 0, \tag{4.17}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m}$ chỉ phụ thuộc vào p và m. Khi $K = 0$ và $u \geq 1$ trong M thì $u \equiv 1$ trong M.

Chứng minh Hệ quả 4.2.5. Ta có $F(u) = alogu$. Do đó, với $p = 2, v = \log u \geq 0$, ta có $h(v) = av \geq 0$ và $h'(v) = a \geq 0$. Chứng minh được suy trực tiếp từ Định lí 4.1.1. $\square$

Chú ý rằng phương trình (4.17) xuất phát từ gradient Ricci soliton. Chúng ta có thể xem thêm [61] để nắm các giải thích chi tiết hơn (xem thêm [30, 94]). Cũng lưu ý rằng trong [31, 92], các tác giả chỉ ra rằng không tồn tại nghiệm dương thỏa mãn $0 < u \leq c < 1$ với $c \in \mathbb{R}$ nào đó.

Tiếp theo chúng ta trình bày ước lượng gradient địa phương cho phương trình không tuyến tính với điều kiện độ cong Ricci tích phân.

Hệ quả 4.2.6. *Cho (M, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ. Giả sử $u \geq 1$ là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_f u + alogu = 0, \quad a \geq 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$. Với $q > n/2$ và $R \leq 1$, khi đó, với mọi $\eta > 0$ tồn tại b đủ lớn sao cho nếu $k(q, 1) \leq \frac{1}{b}$ và $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{1}{bR^2}$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R} + \eta,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và $V = |B_o(R)|$.

Khi $K = 0$, ta có $k(q, 1) = \|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R}$. Khi đó, Hệ quả 4.2.6 kéo theo kết quả sau.

Hệ quả 4.2.7. *Cho (M, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ. Giả sử $u \geq 1$ là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_f u + aulogu = 0, \quad a \geq 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$. Với $q > n/2$ và $R \leq 1$, khi đó với bất kì $\eta > 0$, tồn tại b đủ lớn sao cho nếu $k(q, 1) \leq \frac{1}{b}$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1 + \sqrt{K} R}{R} + \eta,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và $V = |B_o(R)|$.

Để chứng minh Hệ quả 4.2.6, chúng ta cần sử dụng bất đẳng thức Sobolev địa phương sau đây (xem Hệ quả 4.6 trong [26]).

Bổ đề 4.2.8 ([26])**.** *Với mọi $q > n/2$, tồn tại $\varepsilon = \varepsilon(p, n) > 0$ sao cho nếu M^n có $k(p, 1) \leq \varepsilon$, thì với mọi $o \in M, r \leq 1$, ta có*

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \leq C(n) V^{-2/n} \int_{B_o(R)} (R^2 |\nabla \phi|^2 + \phi^2),$$

ở đó $V = |B_o(R)|$.

Chứng minh Hệ quả 4.2.6. Từ $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{p,R} \leq \frac{1}{bR^2}$, điều kiện (4.12) đúng với b đủ lớn. Chúng ta có thể giả sử b thỏa mãn $\frac{1}{b} \leq \varepsilon$. Kết hợp giả thiết $k(p, 1) \leq \frac{1}{b}$ và Bổ đề 4.2.8, ta suy ra M có một bất đẳng thức Sobolev. Do đó, chứng minh được suy trực tiếp từ Định lí 4.1.1. □

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án nghiên cứu tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa, định lí Liouville cho phương trình elliptic và ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- Đưa ra và chứng minh một số định lí về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann, trong đó các kết quả chính là các Định lí 1.1.2, Định lí 1.1.4, Định lí 1.1.6, Định lí 1.1.11, Định lí 1.2.2, Định lí 1.2.3, Định lí 1.2.5.
- Đưa ra và chứng minh một định lí Liouville, cùng các hệ quả của nó, cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lí 1.3.2.
- Đưa ra và chứng minh một số định lí về ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lí 1.4.2.

Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi suy nghĩ về một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Chúng tôi tiếp tục tìm cách đưa ra các điều kiện đủ trên đa tạp Riemann để các dạng vi phân p-điều hòa là triệt tiêu.
- Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu định lí Liouville cho một số lớp phương trình đặc biệt trên đa tạp Riemann.
- Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các ước lượng gradient cho một số lớp phương trình p-Laplace, phương trình nhiệt trên đa tạp Riemann.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] N. T. Dung, P. D. Thoan and N. D. Tuyen (2021), "Liouville theorems for nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds", *J. Math. Anal. Appl.* **496**, 124803.

[2] L. V. Dai, N. T. Dung, N. D. Tuyen and L. Zhao (2022), "Gradient estimates for weighted p-Laplacian equations on Riemannian manifolds with a Sobolev inequality and integral Ricci bounds", *Kodai Math. J.* **45**, 19–37.

[3] N. D. Tuyen (2022), "Vanishing theorems for p-harmonic forms on Riemannian manifolds", *Differ. Geom. Appl.* **82**, 101868.

[4] N. T. Dung and N. D. Tuyen (2023), "p-harmonic 1-forms on totally real submanifolds in complex space forms", *Complex Var. Elliptic Equ.* **68**(10), 1812–1832.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S. M. ALLEN AND J. W. CAHN (1979), "A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening", *Acta Metall.* **27**, 1085–1095. 85

[2] D. BAKRY AND M. ÉMERY (1985), *Diffusions hypercontractives*, in: Sémin, de probilitiés XIX, 1983/84, in: Lecture Notes in Math, vol. 1123, Springer, Berlin, 177–206. 22

[3] R. BAMLER AND Q. ZHANG (2017), "Heat kernel and curvature bounds in Ricci flows with bounded scalar curvature", *Adv. Math.* **319**, 396–450. 7

[4] L. BECK AND B. STROFFOLINI (2013), "Regularity results for differential forms solving degenerate elliptic systems", *Calc. Var.* **46**, 769–808. 22

[5] M. BENALILI AND Y. MALIKI (2006), "Solving p-Laplacian equations on complete manifolds", *Electron. J. Differ. Equ.* **155**, 1–9. 5

[6] G. P. Bessa and J. F. Montenegro (2003), "Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature", *Ann. Global Anal. Geom.* **24**:3 (2), 279–290. 51

[7] A. L. Besse (1987), *Einstein manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb, (**3**) vol. 10, Springer, Berlin. 16

[8] M.-F. Bidaut-Véron and L. Véron (1991), "Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations", *Inventiones Mathematicae* **106**, 489–539. 3

[9] B. V. Binh, N. T. Dung and N. T. Le Hai (2017), "p-harmonic functions on complete manifolds with a weighted Poincaré inequality", *Kodai Math. J.* **40**, no. 2, 343–357. 2

[10] A. Björn, J. Björn and N. Shanmugalingam (2021), "The Liouville theorem for p-harmonic functions and quasiminimizers with finite energy", *Mathematische Zeitschrift* **297**, 827–854. 6, 7

[11] V. Bour and G. Carron (2015), "Optimal integral pinching results", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **48**(4), 41–70. 17

[12] L. Brandolini, M. Rigoli and A. G. Setti (1998), "Positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds and applications", *J. Funct. Anal.* **160**, 176–222. 4

[13] D. Calderbank, P. Gauduchon and M. Herzlich (2000), "Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry", *J. Func. Anal.* **173**, 214–255. 68

[14] X. D. Cao, B. W. Liu, I. Pendleton and A. Ward (2017), "Differential Harnack estimates for Fisher's equation", *Pacific Jour. Math.* **290**, No. 2, 273–300. 86

[15] H. Cao, Y. Shen and S. Zhu (1997), "The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$", *Math. Res. Lett.* **4**(5), 637–644. 2

[16] G. Carron (1998), "Une suite exacte en L^2-cohomologie", *Duke Math. Jour.* **95**, 343–372. 50

[17] G. Carron, "L^2 harmonics forms on non compact manifolds", *see https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/∼carron/cours.pdf.* 2

[18] S. C. Chang, J. T. Chen and S. W. Wei (2016), "Liouville properties for p-harmonic maps with finite q-energy", *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2), 787–825. 2, 5

[19] L. C. Chang, C. L. Guo and J. A. Sung (2010), "P-harmonic 1-forms on complete manifolds", *Arch. Math.* **94**, 183–192. 3

[20] B. Y. Chen and K. Ogiue (1974), "On totally real submanifolds", *Trans. Amer. Math. Soc.* **193**, 257–266. 19, 48

[21] O. Chodosh and C. Mantoulidis (2020), "Minimal surfaces and the Allen–Cahn equation on 3-manifolds: index, multiplicity, and curvature estimates", *Annals of Mathematics* **191**, No. 1, 213–328. 85

[22] H. Choi and K. Seo (2020), "L^p harmonic 1-forms on totally real submanifolds in a complex projective space", *Ann. Global Anal. Geom.* **57**, 383–400. 20, 21, 48, 50, 59, 60, 66

[23] Y. Choquet-Bruhat, J. Isenberg and D. Pollack (2006), "The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds", *Chin. Ann. Math. Ser. B* **27**,31–52. 4

[24] Y. Choquet-Bruhat (2009), *General relativity and the Einstein equations*, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press. 4

[25] D. V. Cuong, N. T. Dung and N. T. K. Son, "Rigidity results on totally real submanifolds in complex space forms", *accepted by Kyoto J. Math.* 19, 20, 48, 49, 56

[26] X. Dai, G. Wei and Z. Zhang (2018), "Local Sobolev constant estimate for integral Ricci curvature bounds", *Adv. Math.* **325**, 1–33. 80, 88

[27] O. Druet (2000), "Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **130**, 767–788. 4, 5

[28] N. T. Dung (2017), "P-harmonic ℓ-forms on Riemannian manifolds with a weighted Poincaré inequality", *Nonlinear Anal.* **150**, 138–150. 3

[29] N. T. Dung and N. D. Dat (2016), "Local and global sharp gradient estimates for weighted p-harmonic functions", *Jour. Math. Anal. Appl.* **443**, 959–980. 6, 8, 83, 84

[30] H. T. Dung and N. T. Dung (2019), "Sharp gradient estimates for a heat equation in Riemannian manifolds", *Proc. Am. Math. Soc.* **147**, no. 11, 5329–5338. 87

[31] N. T. Dung and N. N. Khanh (2022), "Gradient estimates for a class of semilinear parabolic equations and their applications", *Vietnam J. Math.* **50**, 249–259. 87

[32] N. T. Dung, N. N. Khanh and Q. A. Ngo (2018), "Gradient estimates for some f-heat equations driven by Lichnerowicz's equation on complete smooth metric measure spaces", *Manuscr. Math.* **155**, Issue 3–4, 471–501. 5, 23, 72

[33] N. T. Dung and K. Seo (2017), "P-harmonic functions and connectedness at infinity of complete Riemannian manifolds", *Ann. di Mat. Pura ed Appl.* **196** No.4, 1489–1511. 5, 23, 67, 71

[34] N. T. Dung and C. J. Sung (2019), "Analysis of weighted p-harmonic forms and applications", *Int. J. Math.* **30** No. 10, 1950058. 3, 5, 6, 23, 29, 49, 67, 71

[35] N. T. Dung and P. T. Tien (2018), "Vanishing properties of p-harmonic ℓ-forms on Riemannian manifolds", *J. Korean Math. Soc.* **55** No. 5, 1103–1129. 29, 49

[36] F. Duzaar and M. Fuchs (1990), "On removable singularities of p-harmonic maps", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **7**, 385–405. 71

[37] R. A. Fisher (1937), "The wave of advance of advantageous genes", *Annals of Eugenics* **7** (4), 355–369. 86

[38] S. GALLOT (1988), "Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature", *Asterisque No.* **157-158**, 191–216. 7

[39] V. GOL'DSHTEIN AND M.TROYANOV (1999), "The Kelvin-Nevanlinna-Royden criterion for p-parabolicity", *Math. Zeits.* **232**, 607–619. 5

[40] C. HAMBURGER (1992), "Regularity of differential forms minimizing degenerate elliptic functionals", *Jour. für die reine und angewandte Mathematik* **431**, 7–64. 3, 22, 67

[41] Y. B. HAN, Q. Y. ZHANG AND M.H. LIANG (2017), "L^p p-harmonic 1-forms on locally conformally flat Riemannian manifolds", *Kodai Math. J.* **40**, 518–536. 3

[42] R. HARDT AND F. H. LIN (1987), "Mappings minimizing the L^p-norm of the gradient, *Comm. Pure Appl. Math.* **40**, no. 5, 555–588. 76

[43] D. HOFFMAN AND J. SPRUCK (1974), "Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds", *Comm. Pure Appl. Math.* **27**, 715–727. 49

[44] I. HOLOPAINEN (2000), "A sharp L^q-Liouville theorem for p-harmonic functions", *Israel Jour. Math.* **115**, 363–379. 7

[45] S. B. HOU (2019), "Gradient estimates for the Allen-Cahn equation on Riemannian manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.* **147**, no. 2, 619–628. 24, 25, 75, 85

[46] A. N. KOLMOGOROV, I. G. PETROVSKII AND N. S. PISKUNOV (1937), *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiére et son application á un probléme biologique*, Bulletin Université d'Etat á Moscou, pages 1–26, Série internationale, section A 1. 86

[47] B. KOTSCHWAR AND L. NI (2009), "Local gradient estimates of p-harmonic functions, $1/H$-flow, and an entropy formula", *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.* **42**, no. 1, 1–36. 5, 7

[48] P.F. LEUNG (1992), "An estimate on the Ricci curvature of a submanifold and some applications", *Proc. Am. Math. Soc.* **114**(4), 1051–1061. 60

[49] P. Li (1980), "On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13**, 451–468. 2

[50] P. Li (2012), *Geometric analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, New York. 46

[51] P. Li and L. F. Tam (1992), "Harmonic functions and the structure of complete manifolds", *Jour. Diff. Geom.* **35**, 359–383. 2

[52] P. Li and J. Wang (2001), "Complete manifolds with positive spectrum", *Jour. Diff. Geom.* **58**, 501–534. 1, 2

[53] P. Li and J. Wang (2002), "Complete manifolds with positive spectrum II", *Jour. Diff. Geom.* **62**, 143–162. 1, 2

[54] P. Li and J. Wang (2002), "Minimal hypersurfaces with finite index", *Math. Res. Lett.* **9**(1), 95–103. 1, 2

[55] P. Li and J. Wang (2004), "Stable minimal hypersurfaces in a nonnegatively curved manifold", *J. Reine Angew. Math.* **566**, 215–230. 2

[56] Y. Li and X.R. Zhu (2016), "Harnack estimates for a heat-type equation under the Ricci flow", *J. Differ. Equ.* **4**, 3270–3301. 4

[57] H. Lin (2015), "On the structure of conformally flat Riemannian manifolds", *Nonlinear Anal.* **123-124**, 115–125. 14

[58] H. Lin (2019), "Vanishing theorems for complete Riemannian manifolds with nonnegative scalar curvature", *Geom. Dedicata* **201**, 187–201. 2, 15, 16, 17, 18, 27, 39, 40, 41, 42, 46

[59] H. Lin (2020), "Scalar curvature and Betti numbers of compact Riemannian manifolds", *Bull. Braz. Math. Soc. New Series* **51**, 761–771. 12, 13, 27, 28

[60] H. Lin and B. G. Yang (2020), "The p-eigenvalue estimates and L^q p-harmonic forms on submanifolds of Hadamard manifolds", *J. Math. Anal. Appl.* **488**, no. 1, 124018. 3

[61] L. Ma (2006), "Gradient estimates for a simple elliptic equation on complete non-compact Riemannian manifolds", *Jour. Funct. Anal.* **241**, no. 1, 374–382. 87

[62] L. Ma and J. C. Wei (2013), "Stability and multiple solutions to Einstein-scalar field Lichnerowicz equation on manifolds", *J. Math. Pures Appl.* **99** (2), 174–186. 4

[63] P. Mastrolia, M. Rigoli and A. G. Setti (2012), *Yamabe type equations on complete non-compact manifolds*, Springer Basel. 4

[64] J. Michael and L. M. Simon (1973), "Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of $\mathbb{R}^n$", *Comm. Pure Appl. Math.* **26**, 361–379. 49

[65] R. Moser (2007), "The inverse mean curvature flow and p-harmonic functions", *Jour. Eur. Math. Soc.* **9**, 77–83. 7

[66] N. Nakauchi (1998), "A Liouville type theorem for p-harmonic maps", *Osaka J. Math.* **35**, no. 2, 303–312. 7, 71

[67] Q. A. Ngô (2016), *Einstein constraint equations on Riemannian manifolds*, Geometric analysis around scalar curvatures, 119-210. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 31, World Scientific. 4

[68] L. Ni (2001), "Gap theorems for minimal submanifolds in $\mathbb{R}^{n+1}$", *Commun. Anal. Geom.* **9**(3), 641–656. 2

[69] X. R. Olivé (2019), "Neumann Li-Yau gradient estimate under integral Ricci curvature bounds", *Proc. Am. Math. Soc.* **147**, no. 1, 411–426. 7

[70] F. Pacard and M. Ritoré (2003), "From the constant mean curvature hypersurfaces to the gradient theory of phase transitions", *Jour. Diff. Geom.* **64**(3), 356–423. 85

[71] P. Petersen and G. Wei (1997), "Relative volume comparison with integral curvature bounds", *Geom. Funct. Anal.* **7**, 1031–1045. 7

[72] P. Petersen and G. Wei (2001), "Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds. II", *Trans. Amer. Math. Soc. Anal.* **353**, 457–478. 7

[73] S. Pigola, M. Rigoli and A. G. Setti (2008), "Constancy of p-harmonic maps of finite q-energy into non-positively curved manifolds", *Math. Zeits.* **258**, 347–362. 7

[74] M. D. Pino and J. C. Wei (2011), "Solutions to the Allen Cahn equation and minimal surfaces", *Milan Jour. Math.* **79**, 39–65. 85

[75] C. Rose (2017), "Heat kernel upper bound on Riemannian manifolds with locally uniform Ricci curvature integral bounds", *J. Geom. Anal.* **27**, 1737–1750. 7

[76] K. Seo (2008), "Minimal submanifolds with small total scalar curvature in Euclidean space", *Kodai Math. J.* **31**(1), 113–119. 2

[77] S. Seto (2020), "The first nonzero eigenvalue of the p-Laplacian on differential forms", *Pacific Jour. Math.* **309**, No. 1, 213–222. 3

[78] S. Sil (2019), "Nonlinear Stein theorem for differential forms", *Calc. Var.* **58**, Article number: 154. 3

[79] X. F. Song and L. Zhao (2010), "Gradient estimates for the elliptic and parabolic Lichnerowicz equations on compact manifolds", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* **61**, 655–662. 4

[80] C. J. A. Sung and J. Wang (2014), "Sharp gradient estimate and spectral rigidity for p-Laplacian", *Math. Res. Lett.* **21** (4), 885–904. 3

[81] P. Tolksdorf (1984), "Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations", *J. Differ. Equ.* **51**, no. 1, 126–150. 5, 67

[82] M. Troyanov (2000), "Solving the p-Laplacian on manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.* **128**, 541–545. 5

[83] K. Uhlenbeck (1977), "Regularity for a class of non-linear elliptic systems", *Acta Math.* **138**, 219–240. 3, 22

[84] X. D. Wang (2002), "On the L^2 cohomology of a convex cocompact hyperbolic manifold", *Duke Math. Jour.* **115** no.2, 311–327. 1

[85] X. D. Wang and L. Zhang (2011), "Local gradient estimate for p-harmonic functions on Riemannian manifolds", *Comm. Anal. Geom.* **19** (4), 750–771. 5, 7, 67, 76, 83

[86] L. F. Wang (2012), "Eigenvalue estimate for the weighted p-Laplacian", *Annali di Matematica Pure Appl.* **191** no.3, 539–550. 6

[87] W. Wang (2022), "Elliptic type gradient estimates under integral Ricci curvature bounds", *Proc. Am. Math. Soc.* **150**, 4965–4979. 8

[88] W. Wang (2020), "Harnack inequality, heat kernel bounds and eigenvalue estimates under integral Ricci curvature bounds", *J. Differ. Equ.* **269**, 1243–1277. 8

[89] Y. Z. Wang and H. Q. Li (2011), "Lower bound estimates for the first eigenvalue of the weighted p-Laplacian on smooth metric measure spaces", *Differential Geom. Appl.* **45**, 23–42. 76

[90] X. Wang and L. Zhang (2011), "Local gradient estimate for p-harmonic functions on Riemannian manifolds", *Comm. Anal. Geom.* **19** no. 4, 759–771. 5, 7, 67, 76, 83

[91] Y. Wang, J. Yang and W. Chen (2013), "Gradient estimates and entropy formulae for weighted p-heat equations on smooth metric measure spaces", *Acta Math. Scientia* **33**, 963–974. 6, 7

[92] J. Y. Wu (2015), "Elliptic gradient estimates for a weighted heat equation and applications", *Math. Zeits.* **280**, 451–468. 87

[93] J. Y. Wu (2019), "Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation and Liouville theorems", *Manuscr. Math.* **159** Issue 3-4, 511–547. 5

[94] Y. Yang (2008), "Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** no. 11, 4095–4102. 87

[95] S. T. Yau (1976), "Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry", *Indiana Univ. Math. J.* **25**, 659–670. 42

[96] X. Zhang (2001), "A note on p-harmonic 1-forms on complete manifolds", *Canad. Math. Bull.* **44**, 376–384. 3

[97] Q. S. Zhang and M. Zhu (2018), "Li-Yau gradient bounds on compact manifolds under nearly optimal curvature conditions", *J. Funct. Anal.* **275** no. 2, 478–515. 8

[98] Q. S. Zhang and M. Zhu (2017), "Li-Yau gradient bound for collapsing manifolds under integral curvature condition", *Proc. Am. Math. Soc.* **145** no. 1, 3117–3126. 8

[99] L. Zhao (2019), "Liouville theorem for weighted p-Lichnerowicz equation on smooth metric measure space", *J. Differ. Equ.* **266**, 5615–5624. 5, 22, 68

[100] L. Zhao (2013), "Harnack inequality for parabolic Lichnerowicz equations on complete noncompact Riemannian manifolds", *Boundary Value Problems* no. 190. 4

[101] L. Zhao (2014), "Gradient estimates for a simple parabolic Lichnerowicz equation", *Osaka J. Math.* **51**, 245–256. 4

[102] L. Zhao and D. Yang (2018), "Gradient estimates for the p-Laplacian Lichnerowicz equation on smooth metric measure spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** no. 12, 5451–5461. 6, 24, 25, 75, 76, 80, 83, 84, 85