ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

------ ------

Hồ Phi Tứ

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHIẾU MỞ RỘNG GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI CẤP

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

------ ------

Hồ Phi Tứ

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHIẾU MỞ RỘNG GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI CẤP

Chuyên ngành: Toán Ứng Dụng

Mã số: 9460112. 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

2. TS. Vũ Tiến Dũng

Hà Nội - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn của các thầy trong Tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả, số liệu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác. Các dữ liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

Tác giả

Hồ Phi Tứ

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thiện tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông) và TS. Vũ Tiến Dũng (Đại học KHTN-ĐHQGHN). Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến các thầy.

Tác giả cũng bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Ban Chủ nhiệm khoa, các thầy/cô trong Khoa Toán - Cơ - Tin học, đặc biệt là các thầy/cô thuộc bộ môn Toán học Tính toán - Toán Ứng dụng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội đã truyền tải kiến thức và tạo mọi điều kiện tốt nhất cũng như giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình làm nghiên cứu sinh.

Tác giả xin trân trọng cám ơn Ban Giám hiệu, các thầy/cô trong Khoa Toán và Khoa học Tự nhiên, trường Đại học Hải Phòng, nơi tác giả đang công tác đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành luận án.

Xin chân thành cảm ơn các anh/chị/em trong nhóm nghiên cứu tại phòng Lab "Toán ứng dụng và Tính toán" của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông và các bạn bè đồng nghiệp xa gần đã luôn động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tác giả xin được dành tặng món quà tinh thần này cho những người thân yêu trong gia đình của mình, đặc biệt là vợ và hai con gái. Những người luôn đứng sau động viên, chia sẻ và khích lệ tác giả để có thể hoàn thành công việc học tập và nghiên cứu của mình./.

Tác giả

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$	tập số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n-chiều
$\mathbb{H}$	không gian Hilbert thực
$x^k \to x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x
$\|x\|$	chuẩn của véc tơ x
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai véc tơ x và y
I	ma trận đơn vị
Id	ánh xạ đồng nhất
$A \times B$	tích Đề-Các của hai tập hợp A và B
$\mathrm{argmin}\{f(x) : \ x \in C\}$	nghiệm của bài toán cực tiểu của hàm f trên C
$\partial g(x)$	dưới vi phân của g tại x
$\partial^\epsilon g(x)$	dưới vi phân xấp xỉ của g tại x
$\partial_2 f(x, x)$	dưới vi phân của hàm $f(x, \cdot)$ tại x
$\partial_2^\epsilon f(x, x)$	dưới vi phân xấp xỉ của hàm $f(x, \cdot)$ tại x
$\delta_C(\cdot)$	hàm chỉ của tập C
$Pr_C(x)$	hình chiếu của x lên tập C
$Pr_C^\xi(x)$	hình chiếu xấp xỉ của x lên tập C
$N_C(x)$	nón pháp tuyến ngoài của C tại x
$N_C^\epsilon(x)$	nón pháp tuyến xấp xỉ ngoài của C tại x
$d_H(A, B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

DC	hiệu hai hàm lồi
CDMA	đa truy cập phân chia theo mã
$OP(C,h)$	bài toán tối ưu
$CP(C,F)$	bài toán bù
$MN(C,F)$	bài toán tìm chuẩn nhỏ nhất
$VI(C,F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân
$EP(C,f)$	bài toán cân bằng với song hàm cân bằng f và tập ràng buộc C
$EP(C,f,\Phi)$	bài toán cân bằng hỗn hợp
$BVI(C,G,F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp
$BEP(C,g,f)$	bài toán cân bằng hai cấp
$BEP(C,g,f,\Phi)$	bài toán cân bằng trên tập nghiệm bài toán cân bằng hỗn hợp
$BMEP$	bài toán cân bằng hai cấp hỗn hợp
$Fix(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$FP(C,F)$	bài toán điểm bất động của ánh xạ đơn trị
$Sol(C,F)$	tập nghiệm của bài toán $VI(C,F)$
$Sol(C,f)$	tập nghiệm của bài toán $EP(C,f)$
$Sol(C,g,f)$	tập nghiệm của bài toán $BEP(C,g,f)$
$CPU-times/s$	thời gian thực hiện thuật toán tính bằng giây
$Test\ Prob.$	các bài toán chạy thực nghiệm
$Dim.No$	Số chiều
$No.Iter.$	số bước lặp trong thuật toán

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Cân bằng là một trạng thái mà vạn vật trong tự nhiên luôn hướng tới, bởi lẽ khi đạt được trạng thái cân bằng thì mọi sự vật sẽ có được sự tồn tại lâu dài và bền vững nhất. Trong vật lý, một hệ các vật có được trạng thái cân bằng khi hợp lực tác dụng lên chúng bị triệt tiêu. Trong sinh học, trạng thái cân bằng của một hệ sinh thái đạt được khi lượng thú săn mồi và lượng thú mồi có tỷ lệ tương đồng nhau. Trong kinh tế, một thị trường mua bán đạt trạng thái cân bằng khi lượng cung bằng lượng cầu. Ngoài ra thuật ngữ cân bằng còn được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như hóa học, sinh học, kỹ thuật, v.v...

Trong toán học, mô hình cân bằng được xem là một sự phát triển tiếp theo của bài toán bất đẳng thức biến phân và lý thuyết tối ưu với nhiều chủ thể tham gia. Trong đó, mỗi chủ thể có những mục tiêu khác nhau thậm chí là đối lập nhau. Do đó, để tìm một phương án tối ưu cho tất cả các chủ thể là điều không thể. Trong tình huống này một khái niệm cân bằng, đặc biệt là khái niệm điểm cân bằng Nash, dễ được chấp nhận hơn. Do vậy, mô hình cân bằng rất hữu ích trong việc phân tích kết quả các tình huống cạnh tranh, việc giải các mô hình cân bằng có thể giúp chúng ta tìm ra giải pháp giải quyết các mâu thuẫn về quyền lợi của các chủ thể tham gia.

Mô hình bài toán cân bằng, viết tắt, $EP(C, f)$ có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

ở đây, C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, f là một song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = 0$, với mọi $x \in C$.

Bài toán $EP(C, f)$ được giới thiệu đầu tiên bởi H. Nikaido và K. Isoda [70] vào năm 1955 trong bài báo: "*Note on non-cooperative convex game*". Tới năm 1972, nó tiếp tục được Ky Fan [40] nghiên cứu dưới tên gọi bất đẳng thức Ky Fan. Tuy nhiên hơn 20 năm sau, khi các kết quả nghiên cứu của L.D. Mưu, W. Oettli [69] được công bố vào năm 1992 và E. Blum, W. Oettli [28] được công bố vào năm 1994, thì bài toán này mới thực sự thu hút được sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu. Trong kết quả [69], các tác giả cũng đã chỉ ra rằng bài toán $EP(C, f)$ chính là một mô hình tổng quát cho nhiều lớp bài toán quan trọng như bài toán tối ưu $OP(C, h)$, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị $MVI(C, F)$, bài toán tối ưu véc tơ, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, ... Do vậy, bài toán cân bằng $EP(C, f)$ không những có ý nghĩa về mặt lý thuyết mà nó còn mang nhiều ý nghĩa trong ứng dụng. Một ứng dụng nổi bật và tạo được tiếng vang lớn là cân bằng kinh tế Nash-Cournot được nhà toán học J.F. Nash đưa ra dưới dạng mở rộng của mô hình trò chơi bất hợp tác. Kết quả nghiên cứu này được trao giải Nobel về kinh tế năm 1994.

Ngày nay, bài toán cân bằng $EP(C, f)$ đã được tổng quát hóa và phát triển theo nhiều hướng như bài toán cân bằng véc tơ [20, 27, 41], cân bằng đa trị [21], bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán tối ưu, tìm điểm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động [8], bài toán cân bằng trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân [17], bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng [11]. Đặc biệt, thời gian gần đây bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu [10, 12, 13, 25, 35] bởi tính mới trong lý thuyết và các ứng dụng trong thực tiễn. Thực tế chỉ ra rằng, mỗi sản phẩm trong thị trường được sản xuất bởi nhiều công ty khác nhau trong cả nước. Mỗi điểm cân bằng Nash là một phương án tối ưu nhất để lợi nhuận các công ty được cao nhất. Tuy nhiên, nhà nước cần một hàm cân bằng kinh tế vĩ mô để điều tiết nền kinh tế của cả nước. Như vậy, một mô hình cân bằng trên tập các điểm cân bằng (điểm cân bằng Nash) là một ứng dụng quản lý kinh tế thực tiễn của bài toán cung-cầu trong nền kinh tế thị trường. Mô hình bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in Sol(C, g) \text{ sao cho } f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \forall y \in Sol(C, g),$$

trong đó, f và g là các song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = g(x, x) = 0$, với mọi $x \in C$, $Sol(C, g)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Như vậy $BEP(C, g, f)$ là một bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của một bài toán cân bằng khác và cũng là một dạng của bài toán hai cấp. Bài toán này được đề cập đến lần đầu tiên bởi O. Chadli và các cộng sự [33] vào năm 2000. Bài toán $BEP(C, g, f)$ được xem là tổng quát hóa của nhiều lớp bài toán hai cấp trước đó như bài toán tối ưu hai cấp, bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, bài toán cân bằng trên tập bất động, bài toán cân bằng trên bất đẳng thức biến phân, ... Một số trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng hai cấp có thể áp dụng cho các mô hình thực tế. Chẳng hạn, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn được áp dụng cho bài toán điều khiển công suất của mạng CDMA, được giới thiệu bởi H. Iiduka [50], bài toán xử lý tín hiệu [41, 54].

Bài toán cân bằng hai cấp có hai hướng nghiên cứu chính. Hướng thứ nhất, nghiên cứu về sự tồn tại và tính chất của tập nghiệm [38, 65, 77]. Hướng thứ hai, nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải và tính toán trên máy tính [10, 25, 35, 48, 52, 57, 66, 85]. Hiện nay, nghiên cứu các thuật giải hữu hiệu giải bài toán cân bằng hai cấp rất được quan tâm, tuy nhiên một vấn đề khó của bài toán cân bằng hai cấp là tập ràng buộc không được cho dưới dạng hiển. Do vậy, các thuật toán giải bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng thường không được áp dụng một cách trực tiếp cho bài toán cân bằng hai cấp. Chúng tôi điểm lại một số thuật toán hữu hiệu để giải bài toán cân bằng hai cấp. Thuật toán điểm gần kề được đề xuất đầu tiên bởi B. Martinet [62] giải bài toán bất đẳng thức biến phân và được nghiên cứu mở rộng cho bài toán tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại bởi R.T. Rockafeller [80]. Các hướng nghiên cứu này cũng được mở rộng bởi A. Moudafi [67] và I.V. Konnov [55] giải bài toán cân bằng. Năm 2010, A. Moudafi [66] tiếp tục mở rộng để giải bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Thuật toán được viết chi tiết như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \ k = 0 \\ \text{Tìm } x^{k+1} \in C \text{ sao cho:} \\ f(x^{k+1}, y) + \epsilon_k g(x^{k+1}, y) + \frac{1}{r_k}\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \geq 0, \ \forall y \in C, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $\{\epsilon_k\}$ và $\{r_k\}$ là các dãy số thực dương. Thuật toán (1) được viết dưới dạng rất đơn giản, tuy nhiên có hai vấn đề khó phát sinh ở đây là: Vấn đề thứ nhất, tại mỗi bước lặp k, thuật toán cần giải chính xác nghiệm của bài toán cân bằng phụ. Vấn đề thứ hai là sự hội tụ của thuật toán cần đòi hỏi giả thiết

$\|x^{k+1} - x^k\| < o(\epsilon_k)$. Khi đó, tác giả chỉ ra rằng dãy lặp x^k hội tụ yếu tới một nghiệm của bài toán cân bằng hai cấp trong không gian Hilbert thực. Một tiếp cận khác, nguyên lý bài toán phụ được G. Cohen giới thiệu đầu tiên cho bài toán tối ưu [36] và mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân [37]. Trong [63], G. Mastroeni đã mở rộng nguyên lý bài toán phụ cho bài toán cân bằng $EP(C, f)$. Thuật toán có dạng

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ \ k = 0 \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases} \tag{2}$$

Dãy lặp $\{x^k\}$ trong thuật toán (2) hội tụ dưới giả thiết song hàm f đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz. Thực tế giả thiết đơn điệu mạnh là rất chặt. Để khắc phục điều này, T.Đ. Quốc và các cộng sự [76] đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ \ k = 0 \\ y^k = \operatorname{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\} \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases} \tag{3}$$

Dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3) hội tụ trong không gian hữu hạn chiều dưới giả thiết song hàm f giả đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz. Thuật toán đạo hàm tăng cường được tiếp tục mở rộng trong một số kết quả gần đây [7, 10, 58, 75]. Chúng tôi nghiên cứu thuật toán đạo hàm tăng cường mở rộng cho bài toán cân bằng hai cấp và đạt được kết quả trong chương 3 của luận án. Tiếp cận thứ 3, phương pháp chiếu dưới đạo hàm được sử dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp đầu tiên bởi P.E. Maingé [61]. Năm 2011, P. Santos và cộng sự [82] đã áp dụng thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán cân bằng $EP(C, f)$. Dãy lặp của thuật toán được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ \ k = 0 \\ g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^k, x^k),\ \ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k},\ \ \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\} \\ x^{k+1} = Pr_C^{\xi_k}(x^k - \alpha_k g^k). \end{cases} \tag{4}$$

Ưu điểm của thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ (4) là thuật toán chỉ tính một phép chiếu và tính toán dưới đạo hàm xấp xỉ tại mỗi bước lặp.

Các vấn đề lớn được đặt ra khi nghiên cứu các thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp ở đây là:

- *Vấn đề thứ nhất*, tìm nghiệm chính xác của các bài toán phụ trong các thuật toán lặp đã có. Điều này không phải dễ trong các trường hợp bài toán phụ là các bài toán cân bằng hoặc các bài toán bất đẳng thức biến phân;
- *Vấn đề thứ 2*, sự hội tụ của các dãy lặp trong các thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp đòi hỏi giả thiết khá mạnh trên các song hàm như giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz;
- *Vấn đề thứ 3*, bài toán cân bằng hai cấp là một dạng bài toán cân bằng với miền ràng buộc là tập nghiệm của một bài toán cân bằng khác. Khi ánh xạ giá của miền ràng buộc là ánh xạ giả đơn điệu, tập nghiệm ràng buộc là một tập lồi. Tuy nhiên, tập nghiệm ràng buộc không được cho dưới dạng hiện. Hơn nữa, bản thân bài toán cân bằng hai cấp là một bài toán rất tổng quát trong Lý thuyết tối ưu. Chính vì vậy, bài toán cân bằng hai cấp là một bài toán hai cấp khó giải và thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp được nghiên cứu khá hạn chế so với các mô hình toán học khác;
- *Vấn đề thứ 4*, như ta đã biết, phương pháp chiếu là một công cụ rất phổ biến trong việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân nói chung và bài toán cân bằng nói riêng. Việc áp dụng phương pháp này cho bài toán cân bằng hai cấp vẫn là một hướng nghiên cứu mở và có ý nghĩa tính toán trên máy tính với rất nhiều mô hình thực tế.

Với các lý do trên, đề tài luận án "Các phương pháp chiếu mở rộng giải một số lớp bài toán cân bằng hai cấp" là một đề tài có tính thời sự cao và có ý nghĩa trong Lý thuyết tối ưu nói riêng và chuyên ngành Giải tích nói chung. Trong luận án này, chúng tôi đã nghiên cứu mở rộng thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán cân bằng hai cấp. Thuật toán và phân tích sự hội tụ của nó được chúng tôi trình bày chi tiết trong chương 2 và chương 3. Một tiếp cận thứ 4 là tiếp cận DC giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine được chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC dạng hiển mới. Tại mỗi bước lặp chúng tôi chỉ đòi hỏi giải một bài toán lồi mạnh và một bài toán quy hoạch toàn phương. Thuật toán được tính toán một cách hữu hiệu với các ví dụ số thực hiện trên phần mềm MATLAB.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải lớp các bài toán cân bằng hai cấp. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm và thuật toán chiếu tổng quát kết hợp với kỹ thuật quán tính cho bài toán cân bằng hai cấp đơn điệu.

- Nghiên cứu mở rộng thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng hỗn hợp.

- Kết hợp phương pháp chiếu tổng quát và kỹ thuật phân tích DC, đề xuất thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine.

- Triển khai các tính toán số minh họa cho các thuật toán đề xuất, so sánh với các thuật toán đã có và ứng dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Đối tượng nghiên cứu của luận án là lớp các bài toán cân bằng hai cấp trong không gian Hilbert thực. Cụ thể: Bài toán cân bằng với ràng buộc là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng với ràng buộc là tập nghiệm của bài toán cân bằng khác, bài toán cân bằng với ràng buộc là tập điểm bất động giao với tập nghiệm của bài toán cân bằng khác. Một số mô hình thực tế như mô hình cân bằng kinh tế Nash Cournot.

Phạm vi nghiên cứu: Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất thuật toán mới, cải tiến phương pháp xấp xỉ nghiệm cho bài toán cân bằng hai cấp với trọng tâm là mở rộng phương pháp chiếu, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp phân tích DC. Bên cạnh đó, chứng minh sự hội tụ của thuật toán, phân tích sai số tính toán trong một số trường hợp cụ thể cũng được thực hiện một cách chi tiết trong luận án.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để đề xuất thuật toán mới và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp giải bài toán cân bằng hai cấp, ngoài việc sử dụng các kỹ thuật cơ bản trong giải tích, giải tích lồi, giải tích đa trị và giải tích phi tuyến, chúng tôi dựa trên các phương pháp đã được sử dụng trong bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân như phương pháp chiếu dưới đạo hàm, nguyên lý bài toán phụ, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp điểm gần kề,...

5. Kết quả của luận án

Một số kết quả mới đã đạt được của luận án như sau:

- Đề xuất hai thuật toán kiểu chiếu mới và chứng minh sự hội tụ của nó. Thuật toán thứ nhất giải bài toán đơn điệu mạnh với ràng buộc cân bằng đơn điệu. Thuật toán thứ hai sử dụng kỹ thuật chiếu tổng quát và kỹ thuật quán tính giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động giao với tập nghiệm của bài toán cân bằng khác.
- Đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng hỗn hợp và chứng minh sự hội tụ của thuật toán.
- Sử dụng kỹ thuật phân tích DC và phương pháp chiếu tổng quát, đề xuất thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine.
- Thực hiện các tính toán số minh họa cho các thuật toán đã đề xuất, so sánh với các thuật toán khác, áp dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 04 bài báo, trong đó 01 được xuất bản trong tạp chí SCI Q1, 02 được xuất bản trong tạp chí SCIE Q1, Q2 và 01 bài đã gửi đăng trong tạp chí SCIE Q1. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại

- Hội thảo: "Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng" (26-27/12/2021 tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán)
- Hội nghị quốc tế: The International Symposium on Applied Science -ISAS2022 (14 - 16/10/2022 tại Đại học Bách khoa thành phố Hồ Chí Minh)
- Hội thảo: "Tối ưu và Tính toán Khoa học" lần thứ 21 (20-22/4/2023 tại Ba Vì)

- Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X (8-12/08/2023 tại Đà Nẵng)
- Seminar bộ môn Toán học Tính toán – Toán ứng dụng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên-Đại học Quốc gia Hà Nội
- Seminar phòng Lab "Toán Ứng dụng và tính toán", Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, danh mục tài liệu tham khảo và kết luận, luận án được trình bày trong 4 chương:

Chương 1. Bài toán cân bằng hai cấp

Chương 2. Phương pháp chiếu dưới đạo hàm

Chương 3. Phương pháp đạo hàm tăng cường

Chương 4. Nguyên lý bài toán phụ DC

Chương 1

BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI CẤP

Mục đích của chương này là chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cũng như những kết quả đã biết trong giải tích hàm, đặc biệt là giải tích lồi, là kiến thức cơ sở cho các chương sau. Bên cạnh đó, khái niệm về bài toán cân bằng hai cấp, các bài toán liên quan, điều kiện tồn tại nghiệm và một số phương pháp giải thường gặp cho bài toán bài toán cân bằng hai cấp như phương pháp điểm gần kề, phương pháp sử dụng nguyên lý bài toán phụ, phương pháp chiếu cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Nội dung của chương 1 được viết dựa trên một số kết quả trong [1, 2, 3, 24, 26, 53, 72].

1.1 Một vài kiến thức cơ bản

1.1.1 Các khái niệm và một số kết quả cơ bản trong không gian Hilbert thực

Cho $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ký hiệu $\| \cdot \|$ là chuẩn cảm sinh tương ứng. Tích vô hướng $\langle x, y \rangle$ là một hàm liên tục theo các biến x và y, đồng thời thỏa mãn bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Định nghĩa 1.1. Một dãy $\{x^k\}$ trong $\mathbb{H}$ được gọi là

- *hội tụ mạnh (hay hội tụ theo chuẩn)* tới $\hat{x} \in \mathbb{H}$, nếu $\|x^k - \hat{x}\| \to 0$ khi $k \to \infty$ và được ký hiệu bởi $x^k \to \hat{x}$;

- *hội tụ yếu* tới $\hat{x} \in \mathbb{H}$, nếu $\langle y, x^k \rangle \to \langle y, \hat{x} \rangle$ khi $k \to \infty$ với mọi $y \in \mathbb{H}$ và được ký hiệu bởi $x^k \rightharpoonup \hat{x}$.

Cần chú ý rằng, trong không gian Hilbert hữu hạn chiều hoặc trên tập compact tương đối, hai loại hội tụ trên là trùng nhau. Trong không gian Hilbert vô hạn chiều tổng quát, từ $x^k \to \hat{x}$ suy ra $x^k \rightharpoonup \hat{x}$. Để có điều ngược lại chúng ta phải cần thêm điều kiện $\|x^k\| \to \|\hat{x}\|$ (Định lý 1.8.3 trong [23]).

Một số tính chất quan trọng của chuẩn $\|\cdot\|$ được phát biểu trong bổ đề sau.

Bổ đề 1.1. [31, Bổ đề 2.1] *Với $a, b \in \mathbb{H}$ bất kỳ, ta có*

(i) $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - \|b\|^2 - 2\langle a-b, b\rangle$;

(ii) $\|ma + (1-m)b\|^2 = m\|a\|^2 + (1-m)\|b\|^2 - m(1-m)\|a-b\|^2, \ \forall m \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b\rangle + \|b\|^2$;

(iv) $\|a+b\|^2 \le \|a\|^2 + 2\langle b, a+b\rangle$.

Định nghĩa 1.2. Cho C là một tập con của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Khi đó,

- tập C được gọi là *tập lồi* trong $\mathbb{H}$, nếu với mọi $a, b \in C, \ \gamma \in [0,1]$ kéo theo $\gamma a + (1-\gamma)b$ cũng thuộc C;
- tập C được gọi là *nón* có đỉnh tại 0, nếu với mọi $x \in C$ và với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ kéo theo $\alpha x \in C$. Khi $C - x^0$ là nón có đỉnh tại 0 thì ta nói C là nón có đỉnh tại x^0;

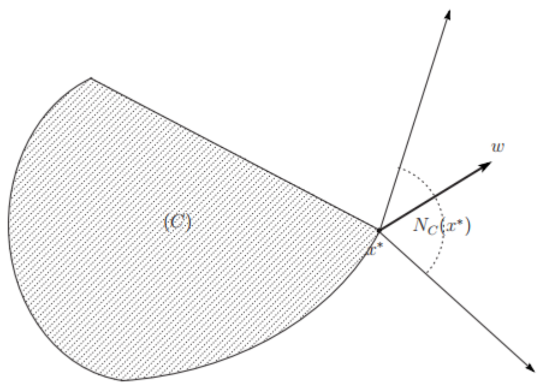
Dễ thấy $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$, các nửa không gian, hình cầu, đa diện $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ (với $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$) là các tập lồi trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Nón pháp tuyến ngoài là khái niệm quan trọng trong Lý thuyết tối ưu nói chung và Lý thuyết bất đẳng thức biến phân cũng như bài toán cân bằng nói riêng.

Định nghĩa 1.3. Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, x^* là một phần tử thuộc tập C. Khi đó,

- tập $N_C(x^*) = \{\omega \in \mathbb{H} : \langle \omega, y - x^*\rangle \le 0, \ \forall y \in C\}$ được gọi là *nón pháp tuyến ngoài* của C tại x^*.

Từ định nghĩa trên ta có, nếu $x^* \in \text{int}C$ thì $N_C(x^*) = \{0\}$. Dưới đây là hình minh họa cho nón pháp tuyến ngoài của tập C tại điểm x^*.



Hình 1.1: Tập nón pháp tuyến ngoài $N_C(x^*)$

Cho C là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{H}$ và hàm số $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Khi đó, các tập

$$\begin{aligned} \mathrm{dom} f =& \{x \in C : \ f(x) < +\infty\} \\ \mathrm{epi} f =& \{(x, a) \in C \times \mathbb{R} : \ f(x) \le a\}, \end{aligned}$$

được gọi là miền hữu hiệu và tập trên đồ thị tương ứng của hàm f. Một hàm f có $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty, \ \forall x \in C$ được gọi là hàm chính thường trên miền C.

Hàm lồi đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu nói chung và lý thuyết bất đẳng thức biến phân cũng như cân bằng nói riêng. Sau đây là một số dạng lồi của hàm f.

Định nghĩa 1.4. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Một hàm chính thường $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là

- *lồi mạnh* trên C với hằng số $\beta > 0$, nếu

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\beta}{2}(1-t)t\|x-y\|^2, \ \forall t \in [0, 1], x, y \in C;$$

- *lồi* trên C, nếu

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y), \ \forall t \in [0, 1], x, y \in C;$$

- *lồi chặt* trên C, nếu

$$f\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)f(x) + tf(y), \ \forall t \in (0, 1), x, y \in C, x \neq y;$$

- *tựa lồi* trên C, nếu

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq \max\big\{f(x), f(y)\big\},\ \forall t \in [0,1], x, y \in C.$$

Từ định nghĩa: *lồi mạnh* $\Rightarrow$ *lồi chặt* $\Rightarrow$ *lồi* $\Rightarrow$ *tựa lồi.*

Ví dụ 1.1.

1) Cho tập lồi C, khi đó hàm chỉ $\delta_C(v) = \begin{cases} 0 & \text{khi } v \in C \\ +\infty & \text{khi } v \notin C \end{cases}$ là hàm lồi trên C.

2) Hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle x, a\rangle + b$ với $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nửa xác định dương, $a \in \mathbb{R}^n$ và $b \in \mathbb{R}$ là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$.

3) Cho $C \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ là tập lồi, khác rỗng. Khi đó, hàm số $f(x) = \|x\|$ lồi trên C. Hơn nữa, nếu $0 \in C$ và $C \setminus \{0\} \neq \emptyset$ thì f không lồi chặt trên C.

4) Hàm số f từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ là lồi mạnh trên $\mathbb{R}^n$ với hệ số $\tau = \frac{1}{2}$.

Cho $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{H}$ và hàm số $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \alpha \in (-\infty, +\infty]$. Ta gọi các tập $L_\alpha(f) := \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ và $L^0_\alpha(f) := \{x \in C : f(x) < \alpha\}$ là tập mức dưới và tập mức dưới chặt tương ứng của f. Khi đó ta có tính chất sau, hàm f lồi khi và chỉ khi tập epi$f$ lồi và hàm f lồi kéo theo các tập dom(f), $L_\alpha(f)$, $L^0_\alpha(f)$ cũng lồi.

Định nghĩa 1.5. Cho hàm chính thường $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x^0 \in \mathbb{H}$. Khi đó

- Phần tử $w \in \mathbb{H}$ được gọi là *dưới đạo hàm* của hàm f tại x^0, nếu

$$\langle w, x - x^0\rangle + f(x^0) \leq f(x),\ \forall x \in \mathbb{H}.$$

  Tập hợp tất cả các dưới đạo hàm của hàm f tại x^0 được gọi là *dưới vi phân* của f tại x^0, được ký hiệu bởi $\partial f(x^0)$. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* tại x^0, nếu $\partial f(x^0) \neq \emptyset$.

- Hàm f được gọi là khả dưới vi phân trên $\mathbb{H}$, nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathbb{H}$.

- Phần tử $w \in \mathbb{H}$ được gọi là *dưới đạo hàm xấp xỉ* của f tại x^0, nếu

$$\langle w, x - x^0\rangle + f(x^0) \leq f(x) + \epsilon,\ \forall x \in \mathbb{H},$$

với $\epsilon > 0$ cố định cho trước. Tập hợp tất cả các dưới đạo hàm xấp xỉ của hàm f tại x^0 được gọi là *dưới vi phân xấp xỉ* của hàm f tại x^0 và được kí hiệu bởi $\partial^\epsilon f(x^0)$.

Từ định nghĩa suy ra, $\partial f(x^0) \subseteq \partial^\epsilon f(x^0)$ với mọi $\epsilon \geq 0$.

Chú ý 1.1. *Với hàm $f : C \to \mathbb{R}$, ta định nghĩa dưới vi phân và dưới vi phân xấp xỉ của hàm f trên C như trong Định nghĩa 1.5 bằng cách mở rộng hàm f lên toàn bộ không gian như sau*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2.

1) Chúng ta đã biết hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại 0. Tuy nhiên dễ dàng tính được dưới vi phân của f tại 0 là đoạn $[-1, 1]$. Tổng quát ta có dưới vi phân của hàm $f(x) = \|x\|$ từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ là

$$\partial f(x^0) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| \leq 1\} & \text{nếu } x^0 = 0; \\ \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| = 1, \langle w, x^0 \rangle = \|w\|\} & \text{nếu } x^0 \neq 0. \end{cases}$$

2) Xét hàm số

$$h(x) = \begin{cases} -x + |x - 2| & \text{nếu } x \geq 1; \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}|x| - 1 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Khi đó, dưới vi phân xấp xỉ của h tại 0 là $\partial^\epsilon h(0) = [0, 1]$ và dưới vi phân xấp xỉ của h tại 2 là $\partial^\epsilon h(2) = [-2, 0]$ với mỗi $\epsilon > 0$.

3) Cho hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } x < 0; \\ -\sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó, $\partial g(0) = \emptyset$. Tuy nhiên, với mọi $\epsilon > 0$ ta có dưới vi phân xấp xỉ của g tại 0 là

$$\partial^\epsilon g(0) = \left(-\infty, -\frac{1}{4\epsilon}\right].$$

Định nghĩa 1.6. Cho $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{H}$. Hàm số $g : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là

- *nửa liên tục dưới* tại $x^* \in C$, nếu

$$\forall \{x^k\} \subset C : x^k \to x^* \Rightarrow \liminf_{k\to+\infty} g(x^k) \geq g(x^*);$$

- *nửa liên tục dưới yếu* tại $x^* \in C$, nếu

$$\forall \{x^k\} \subset C : x^k \rightharpoonup x^* \Rightarrow \liminf_{k\to+\infty} g(x^k) \geq g(x^*);$$

- *nửa liên tục trên* tại $x^* \in C$, nếu

$$\forall \{x^k\} \subset C : x^k \to x^* \Rightarrow \limsup_{k\to+\infty} g(x^k) \leq g(x^*);$$

- *nửa liên tục trên yếu* tại $x^* \in C$, nếu

$$\forall \{x^k\} \subset C : x^k \rightharpoonup x^* \Rightarrow \limsup_{k\to+\infty} g(x^k) \leq g(x^*);$$

- *liên tục* tại $x^* \in C$, nếu nó vừa nửa liên tục dưới vừa nửa liên tục trên tại x^*;

- *bán liên tục* tại $x^* \in C$, nếu $\lim\limits_{t\to 0^+} f(tz + (1-t)x^*) = f(x^*),\ \forall z \in C$;

- *liên tục yếu theo dãy* trên C, nếu dãy $\{x^k\} \subset C$ hội tụ yếu đến $x^* \in C$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} g(x^k) = g(x^*)$;

- *nửa liên tục dưới* (*nửa liên tục dưới yếu, nửa liên tục trên, nửa liên tục trên yếu, liên tục, bán liên tục*) trên C, nếu f nửa liên tục dưới (nửa liên tục dưới yếu, nửa liên tục trên, nửa liên tục trên yếu, liên tục, bán liên tục) tại mọi điểm $x^* \in C$.

1.1.2 Phép chiếu và song hàm đơn điệu

Cho không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Gọi C là tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathbb{H}$. Khi đó, ánh xạ Pr_C từ $\mathbb{H}$ vào C xác định bởi $Pr_C(x) = \text{argmin}\{\|t - x\| : t \in C\}$ được gọi là phép chiếu của $\mathbb{H}$ lên C. Phần tử $Pr_C(x) \in C$ được gọi là hình chiếu của x trên C và $\|x - Pr_C(x)\|$ chính là khoảng cách từ x tới tập C. Trong trường hợp đặc biệt, tập C có dạng: $C = \{t \in \mathbb{H} : \langle a, t\rangle \leq b\}$ (là một nửa không gian), phép chiếu $Pr_C(x)$ được cho bởi công thức dạng hiển sau:

$$Pr_C(x) = \begin{cases} x - \frac{\langle a,x\rangle - b}{\|a\|^2} a & \text{nếu } \langle a, x\rangle - b > 0, \\ x & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Phép chiếu đóng một vai trò rất quan trọng trong việc xây dựng thuật giải cho các bài toán tối ưu nói chung và bài toán cân bằng nói riêng. Chúng tôi dùng một số tính chất cơ bản của phép chiếu, để chứng minh sự hội tụ của các thuật toán trong các chương sau.

Mệnh đề 1.1. [24, Mệnh đề 4.8] *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Khi đó,*

(i) *với mỗi $u \in \mathbb{H}$, tồn tại duy nhất $Pr_C(u)$;*

(ii) $\langle u - Pr_C(u), v - Pr_C(u)\rangle \leq 0,\ \forall v \in C, u \in \mathbb{H}$;

(iii) $\|Pr_C(u) - Pr_C(v)\|^2 \leq \left\langle Pr_C(u) - Pr_C(v), u - v \right\rangle,\ \forall u, v \in \mathbb{H}$;

(iv) $\|Pr_C(u) - Pr_C(v)\| \leq \|u - v\|,\ \forall u, v \in \mathbb{H}$;

(v) $\|u - Pr_C(u)\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \|v - Pr_C(u)\|^2,\ \forall u \in \mathbb{H}, v \in C$;

(vi) $\|Pr_C(u) - Pr_C(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \|Pr_C(u) - u + v - Pr_C(v)\|^2,\ \forall u, v \in \mathbb{H}$.

Mệnh đề 1.2. [61, Mệnh đề 4.1] *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Khi đó,*

(i) $\|u - Pr_C(u - v)\| \leq \|v\|,\ \forall u \in C,\ v \in \mathbb{H}$;

(ii) $\|t - Pr_C(u - v)\|^2 \leq \|u - t\|^2 - 2\langle u - t, v\rangle + 5\|v\|^2,\ \forall u, t \in C,\ v \in \mathbb{H}$.

Tiếp theo là các khái niệm về tính đơn điệu và tính liên tục kiểu Lipschitz của một ánh xạ.

Định nghĩa 1.7. Cho C là một tập con của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và ánh xạ $F : C \to \mathbb{H}$. Khi đó, F được gọi là

- *đơn điệu mạnh ngược* trên C với hằng số α, nếu tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$\langle u - v, F(u) - F(v)\rangle \geq \alpha\|F(u) - F(v)\|^2 \text{ với mọi } u, v \in C,$$

  khi $\alpha = 1$, thì F được gọi là không giãn vững trên C;

- *đơn điệu mạnh* trên C với hằng số β, nếu tồn tại số $\beta > 0$ sao cho

$$\langle u - v, F(u) - F(v)\rangle \geq \beta\|u - v\|^2 \text{ với mọi } u, v \in C;$$

- *đơn điệu chặt* trên C, nếu với mọi $u, v \in C$ và $u \neq v$ ta có

$$\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle > 0;$$

- *đơn điệu* trên C, nếu

$$\langle u - v, F(u) - F(v) \rangle \geq 0 \text{ với mọi } u, v \in C;$$

- *giả đơn điệu* trên C với hằng số γ, nếu tồn tại số $\gamma > 0$ sao cho

$$\langle u - v, F(v) \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u - v, F(u) \rangle \geq \gamma \|u - v\|^2 \text{ với mọi } u, v \in C;$$

- *giả đơn điệu mạnh* trên C, nếu

$$\langle u - v, F(v) \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u - v, F(u) \rangle \geq 0 \text{ với mọi } u, v \in C;$$

- *liên tục Lipschitz* trên C với hằng số L, nếu tồn tại số $L > 0$ sao cho

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\| \text{ với mọi } u, v \in C,$$

  hơn nữa nếu $L \in (0, 1)$ thì F được gọi là ánh xạ co trên C. Đặc biệt $L = 1$, F được gọi là ánh xạ không giãn trên C;

- *tiệm cận không giãn* trên C, nếu tồn tại dãy số không âm $\{\theta_k\}$ với $\lim\limits_{k \to \infty} \theta_k = 0$ sao cho

$$\|F^k(u) - F^k(v)\| \leq (1 + \theta_k)\|u - v\| \text{ với mọi } k \geq 1 \text{ và với mọi } u, v \in C;$$

- *giả co chặt* trên C với hằng số ζ , nếu tồn tại $\xi \in [0, 1)$ sao cho

$$\|F(u) - F(v)\|^2 \leq \|u - v\|^2 + \zeta\|(Id - F)u - (Id - F)v\|^2 \text{ với mọi } u, v \in C,$$

  trong đó Id là ánh xạ đồng nhất.

Ví dụ 1.3. [43] Xét $\mathbb{H} = l^2$. Gọi B là cầu đơn vị trong l^2 và ánh xạ F từ B vào B được xác định như sau

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1^2, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots),$$

trong đó $\{\alpha_i\} \subset (0, 1)$ sao cho $\prod\limits_{i=2}^{\infty} \alpha_i = \dfrac{1}{2}$. Khi đó $\|F(x) - F(y)\| \leq 2\|x - y\|$ với mọi $x, y \in B$. Hơn nữa,

$$\|F^i(x) - F^i(y)\| \leq 2 \prod_{i=2}^{\infty} \alpha_i \|x - y\| \text{ với mọi } i = 2, 3, \ldots$$

Do đó F là ánh xạ tiệm cận không giãn trên B.

Từ mối liên hệ giữa bài toán cân bằng $EP(C, f)$ và bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ thông qua việc chọn song hàm $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle, \ \forall x, y \in C$, chúng ta cũng có các khái niệm đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz của song hàm f tương ứng dưới đây.

Định nghĩa 1.8. Cho song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$. Khi đó, song hàm f được gọi là

- *đơn điệu mạnh* trên C với hằng sô α, nếu tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$f(x, y) + f(y, x) \le -\alpha\|x - y\|^2, \ \forall x, y \in C;$$

- *đơn điệu chặt* trên C, nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0, \ \forall x, y \in C \text{ và } x \ne y;$$

- *đơn điệu* trên C, nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \le 0, \ \forall x, y \in C;$$

- *giả đơn điệu mạnh* trên C với hắng số β, nếu tồn tại số $\beta > 0$ sao cho

$$f(x, y) \ge 0 \Rightarrow f(y, x) \le -\beta\|x - y\|^2, \ \forall x, y \in C;$$

- *giả đơn điệu* trên C, nếu

$$f(x, y) \ge 0 \Rightarrow f(y, x) \le 0, \ \forall x, y \in C;$$

- *giả đơn điệu chặt* trên C, nếu

$$f(x, y) \ge 0 \Rightarrow f(y, x) < 0, \ \forall x, y \in C \text{ và } x \ne y;$$

- *tựa đơn điệu* trên C, nếu

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) \le 0, \ \forall x, y \in C;$$

- *para-đơn điệu* trên $S \subset C$, nếu f đơn điệu trên C và thỏa mãn

$$\{x \in S, y \in C, f(y, x) = f(x, y) = 0\} \Rightarrow y \in S;$$

- *liên tục kiểu Lipschitz* trên C với các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$, nếu

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c_1\|x-y\|^2 - c_2\|y-z\|^2,\ \forall x,y,z \in C.$$

Ví dụ 1.4. Cho tập $C_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\},\ C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ và song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = (2 + x^2)(x - y).$$

Khi đó, f đơn điệu mạnh trên C_1, đơn điệu chặt trên C_2. Nhưng f không đơn điệu mạnh trên C_2.

Thật vậy, với $x, y \in C_1$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,x) &= (2+x^2)(x-y) + (2+y^2)(y-x) \\ &= (x+y)(x-y)^2 \\ &\leq -4(x-y)^2. \end{aligned}$$

Như vậy, f đơn điệu mạnh trên C_1 với hằng số $\alpha = 4$.
Tương tự trên, với $x, y \in C_2$ và $x \neq y$ ta cũng có

$$f(x,y) + f(y,x) = (x+y)(x-y)^2 < 0,$$

do đó, f đơn điệu chặt trên C_2.
Giả sử f đơn điệu mạnh trên C_2 với hệ số $\beta > 0$. Khi đó,

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\beta(x-y)^2\ \forall x,y \in C_2.$$

Suy ra,

$$x + y \leq -\beta\ \forall x,y \in C_2.$$

Chọn $x = 0$ và $y = -\beta/2$ cùng thuộc C_2, thay vào bất đẳng thức trên ta thu được $-\frac{\beta}{2} \leq -\beta$, vô lý. Dẫn đến, f không đơn điệu mạnh trên C_2.

Ví dụ 1.5. Xét song hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = x^2(y - x).$$

Khi đó, f giả đơn điệu trên $C := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nhưng f không đơn điệu trên C.

Thật vậy, giả sử $f(x,y) = x^2(y-x) \geq 0,\ \forall x, y \in C$. Vì $xy \neq 0$, nên suy ra $y \geq x$ và do đó $f(y,x) = y^2(x-y) \leq 0$. Vậy f giả đơn điệu trên C.
Mặt khác với mọi $x, y \in (-\infty, 0)$ và $x \neq y$, ta có

$$f(x,y) + f(y,x) = x^2(y-x) + y^2(x-y) = -(x+y)(x-y)^2 > 0.$$

suy ra f không đơn điệu trên C.

Mở rộng các khái niệm đơn điệu, nửa liên tục, liên tục của ánh xạ đơn trị, chúng ta cũng có các khái niệm tương ứng của ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 1.9. Cho ánh xạ đa trị $F : C \rightrightarrows \mathbb{H}$. Khi đó, F được gọi là

- *đơn điệu mạnh* với hằng số τ, nếu tồn tại hằng số $\tau > 0$ sao cho

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq \tau\|x-y\|^2,\ \forall x, y \in C \text{ và } \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

- *đơn điệu chặt*, nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle > 0,\ \forall x, y \in C, x \neq y \text{ và } \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

- *đơn điệu*, nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in C \text{ và } \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

Định nghĩa 1.10. Cho ánh xạ đa trị $F : C \rightrightarrows \mathbb{H}$ và điểm $x^0 \in C$. Khi đó, F được gọi là

- *nửa liên tục trên* tại x_0, nếu với mọi tập con mở $U \subset C$ mà $F(x_0) \subset U$, tồn tại lân cận $V(x_0)$ của x_0 sao cho $F(w_0) \subset U, \forall w_0 \in V(x_0)$. Ánh xạ F là nửa liên tục trên trên C, nếu nó là nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in C$;

- *nửa liên tục dưới* tại x_0, nếu với mọi $y \in F(x_0)$ và dãy $\{x^n\}$ trong C hội tụ đến x_0, tồn tại dãy $\{y^n\} \subset F(x^n)$ hội tụ về y;

- *liên tục* tại x_0, nếu nó vừa liên tục trên, vừa liên tục dưới tại x_0. Nếu F là liên tục tại mọi điểm thuộc C thì F được gọi là liên tục trên C.

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại khái niệm khoảng cách Hausdorff giữa hai tập trong không gian Hilbert và một số ví dụ minh họa.

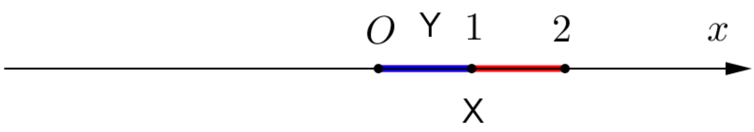
Định nghĩa 1.11. Cho $\mathbb{A}$ và $\mathbb{B}$ là hai tập con khác rỗng của $\mathbb{H}$, *khoảng cách Hausdorff* giữa $\mathbb{A}$ và $\mathbb{B}$ được xác định như sau:

$$d_H(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \max\{d(\mathbb{A}, \mathbb{B}), d(\mathbb{B}, \mathbb{A})\},$$

trong đó $d(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \sup\limits_{x \in \mathbb{A}} \inf\limits_{y \in \mathbb{B}} \|x - y\|$, $d(\mathbb{B}, \mathbb{A}) := \sup\limits_{x \in \mathbb{B}} \inf\limits_{y \in \mathbb{A}} \|x - y\|$.

Ví dụ 1.6. Trên trục số thực, cho hai đoạn thẳng $X = [0, 2], Y = [0, 1]$ (Hình 1.2). Khi đó,

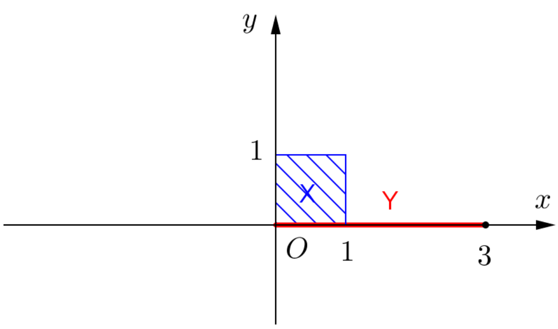
$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &= \max\{\max_{y \in Y} d(y, X), \max_{x \in X} d(x, Y)\} \\ &= 1. \end{aligned}$$



Hình 1.2: Hình minh họa cho Ví dụ 1.5

Ví dụ 1.7. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $X = [0, 1] \times [0, 1]$ và đoạn thẳng $Y = [0, 3] \times \{0\}$ (Hình 1.3). Khi đó,

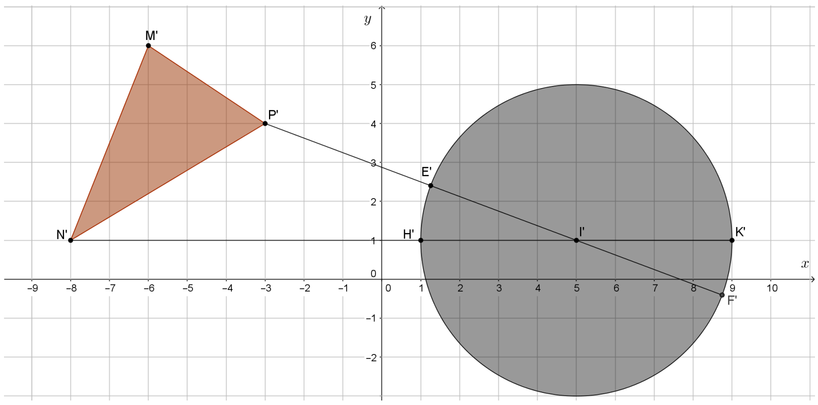
$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &= \max\{\max_{y \in Y} d(y, X), \max_{x \in X} d(x, Y)\} \\ &= 2. \end{aligned}$$



Hình 1.3: Hình minh họa cho Ví dụ 1.6

Ví dụ 1.8. Trong mặt phẳng Oxy cho tập X là tam giác $M'N'P'$ với $M'(-6;6), N'(-8;1)$, $P'(-3;4)$ và Y là đường tròn tâm $I'(5;1)$, bán kính $R = 4$ (Hình 1.4). Gọi E', F' là giao của $P'I'$ với đường tròn và H', K' là giao của $N'I'$ với đường tròn. Khi đó,

$$\max_{y\in Y}\{d(y,X)\} = F'P' = P'I' + R = \sqrt{8^2+3^2} + 4 \simeq 12,5 \text{ và}$$
$$\max_{x\in X}\{d(x,Y)\} = N'H' = 9 \Rightarrow d_H(X,Y) = \max\{9; 12,5\} = 12,5.$$



Hình 1.4: Hình minh họa cho Ví dụ 1.7

Định nghĩa 1.12. Ánh xạ đa trị $F : C \rightrightarrows \mathbb{H}$ được gọi là

- *liên tục Lipschitz* trên C với hằng số $L > 0$, nếu

$$d_H(F(x), F(y)) \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in C.$$

  Đặc biệt, khi $L < 1$ thì F được gọi là ánh xạ *co* trên C và khi $L = 1$ thì F được gọi là ánh xạ *không giãn* trên C.

- *ϵ-liên tục Lipschitz* ($\epsilon > 0$) với hằng số L trên C, nếu

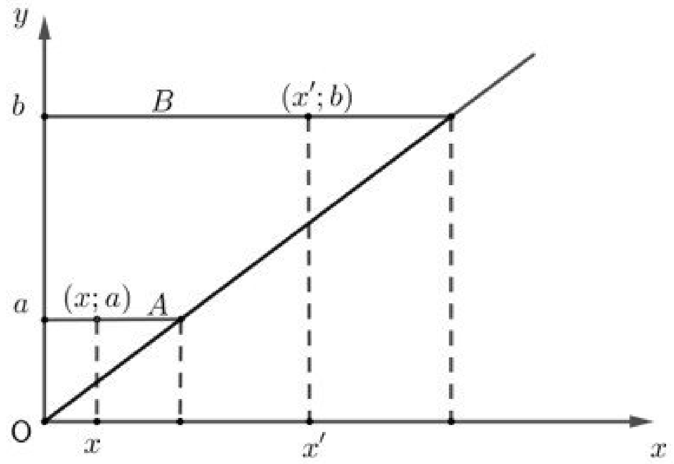
$$d_H(F(x), F(y)) \leq L\|x - y\| + \epsilon, \ \forall x, y \in C.$$

  Trong trường hợp $0 < L < 1$, ta nói F là *ϵ-co với hằng số L.*

Ví dụ 1.9. Cho $M = \{(0; y) : \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, xét ánh xạ đa trị $F : M \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$F\Big((0; y)\Big) := \{(x; y) : \ 0 \leq x \leq y\}.$$

Khi đó, ánh xạ F liên tục Lipschitz với hằng số $L = \sqrt{2}$.



Hình 1.5: Hình minh họa cho Ví dụ 1.8

Thật vậy, lấy hai điểm $(0; a), (0; b)$ thuộc M bất kỳ. Không mất tổng quát, giả sử $0 \le a \le b$. Đặt

$$\mathbb{A} = F\Big((0; a)\Big) := \{(x; a) : \ 0 \le x \le a\},$$

$$\mathbb{B} = F\Big((0; b)\Big) := \{(x'; b) : \ 0 \le x' \le b\}.$$

Với $u(x; a) \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} d(u, \mathbb{B}) &= \inf_{v \in \mathbb{B}} \|u - v\| \\ &= \inf_{0 \le x' \le b} \sqrt{(b-a)^2 + (x'-x)^2} \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Suy ra

$$d(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup_{u \in \mathbb{A}} d(u, \mathbb{B}) = \sup_{0 \le x \le a} (b - a) = b - a.$$

Tương tự,

$$d(v, \mathbb{A}) = \inf_{u \in \mathbb{A}} \|u - v\| = \inf_{0 \le x \le a} \sqrt{(b-a)^2 + (x'-x)^2}.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow d(\mathbb{B}, \mathbb{A}) &= \sup_{v \in \mathbb{B}} d(v, \mathbb{A}) \\ &= \sup_{0 \le x' \le b} \sqrt{(b-a)^2 + (x'-a)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2}(b-a).$$

Do đó

$$\begin{aligned} d_H(\mathbb{A},\mathbb{B}) &= \max\{d(\mathbb{A},\mathbb{B}), d(\mathbb{B},\mathbb{A})\} \\ &= \sqrt{2}(b-a) \\ &= \sqrt{2}\|(0;a)-(0;b)\|,\ \forall (0;a),(0;b) \in M. \end{aligned}$$

Như vậy, ánh xạ đa trị F là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L = \sqrt{2}$. ■

1.1.3 Bài toán hai cấp

Cho X, Y là các tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$ tương ứng. Các hàm $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và ánh xạ đa trị $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$. Trong mục này, ta xét bài toán hai cấp được đề xuất bởi M.B. Lignola và J. Morgan [65]. Bài toán được xét có dạng:

$$\min\{f(x,y) : (x,y) \in Z \subseteq X \times Y, y \in H(x) \cap T(x)\}, \tag{1.1}$$

ở đây

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : h(x,y,z) + \Phi(x,y,y) \le \Phi(x,y,z),\ \forall z \in \mathbb{R}^m\}.$$

Sự tồn tại nghiệm của bài toán hai cấp (1.1) được khẳng định thông qua định lý sau.

Định lý 1.1. [65, Định lý 4.1] *Cho X compact, $Z \subseteq X \times Y$ đóng, $f : X \times Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nửa liên tục dưới, các hàm $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,và $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thỏa mãn các điều kiện*

(i) *Với (x,y,z) bất kỳ và với mọi dãy $\{(x^k,y^k,z^k)\}$ hội tụ về (x,y,z), ta luôn có*

$$\Phi(x,y,z) \le \liminf_{k\to+\infty} \Phi(x^k,y^k,z^k);$$

(ii) *Với (x,y,z) bất kỳ và với mọi dãy $\{(x^k,y^k)\}$ hội tụ về (x,y), luôn tồn tại dãy $\{z^k\}$ hội tụ về z sao cho*

$$\limsup_{k\to+\infty} \Phi(x^k,y^k,z^k) \le \Phi(x,y,z);$$

(iii) *Hàm $h(x,y,\cdot)$ lõm và hàm $\Phi(x,y,\cdot)$ lồi với x,y bất kỳ;*

(iv) *Hàm $h(x, \cdot, z)$ nửa liên tục dưới trên các phân đoạn của đường thẳng;*

(v) *$h(x, y, y) = 0$ với mọi x, y;*

(vi) *Với (x, y, z) bất kỳ, với mọi dãy $\{(x^k, y^k)\}$ hội tụ về (x, y) và với mọi dãy $\{z^k\}$ hội tụ về z, ta có*

$$-h(x, y, z) \leq \liminf_{n \to +\infty} h(x^k, y^k, z^k);$$

(vii) *H đóng và mọi lưới $\{u^a\}$ hội tụ về $u \in \mathbb{R}^n$, $v^a \in H(x^a)$, lưới $\{v^a\}$ có điểm tụ.*

Khi đó, Bài toán (1.1) có nghiệm. Hơn nữa, nếu H được cho bởi

$$H(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : h_i(x, y) \leq 0, \ i \in \{1, \ldots, p\}\}$$

trong đó, h_i $(i \in \{1, \ldots, p\})$ thỏa mãn các điều kiện

(a) *h_i nửa liên tục dưới trên $X \times Y$;*

(b) *Tồn tại $i \in \{1, \ldots, p\}$ sao cho với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại tập compact K và $\cup_{x \in X}\{y \in Y : h_i(x, y) \leq \alpha\} \subseteq K$;*

thì bài toán

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) \\ &s.t. \begin{cases} (x, y) \in Z, h_i(x, y) \leq 0, \ i \in \{1, \ldots, p\} \\ h(x, y, z) + \Phi(x, y, y) \leq \Phi(x, y, z), \ \forall z \in \mathbb{R}^m \end{cases} \end{aligned}$$

có nghiệm.

1.1.4 Một vài kết quả bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một vài kết quả đã biết và sẽ được dùng để chứng minh sự hội tụ của các thuật toán trong các chương sau.

Bổ đề 1.2. [84, Bổ đề 1] *Cho $\{a_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là các dãy số thực không âm sao cho*

$$a_{k+1} \leq a_k + \delta_k, \ \forall k \geq 0,$$

trong đó $\{\delta_k\}$ thỏa mãn $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$. Khi đó, tồn tại giới hạn $\lim_{k \to \infty} a_k$.

Bổ đề 1.3. [60, Chú ý 4.4] *Cho $\{a_k\}$ là dãy số thực không âm. Giả sử với số nguyên m tùy ý, tồn tại số tự nhiên p sao cho $p \geq m$ và $a_p \leq a_{p+1}$. Xét k_0 là số nguyên sao cho $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$ và τ_k được định nghĩa với mọi số tự nhiên $k \geq k_0$ như sau*

$$\tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k,\ a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó, $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ với mọi $k \geq k_0$. Hơn nữa, dãy $\{\tau(k)\}_{k \geq k_0}$ là không giảm và tiến về $+\infty$ khi $k \to \infty$.

Bổ đề 1.4. [86, Mệnh đề 2.31] *Cho C là tập con lồi của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và hàm $g : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ lồi. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán:*

$$\min\{g(x) : x \in C\}$$

khi và chỉ khi $0 \in \partial g(\bar{x}) + N_C(\bar{x})$, trong đó ∂g là dưới vi phân của g và $N_C(\bar{x})$ là nón pháp tuyến ngoài của C tại $\bar{x} \in C$.

Bổ đề 1.5. [22, Mệnh đề 23] *Cho X và Y là hai tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, G là một ánh xạ đa trị từ Y vào X, và hàm số $W : X \times Y \to \mathbb{R}$. Khi đó,*

$$M(y) = \left\{x^* \in G(y) : W(x^*, y) = \sup\{W(x, y) : x \in G(y)\}\right\},$$

nửa liên tục trên khi W và G là liên tục.

Bổ đề 1.6. [59, Định lý 2.3] *Cho $\rho > 0$, $G(x) = Qx + q$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, với ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ và $Sol(C, G)$ là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$. Khi đó, tồn tại hai số dương $\epsilon > 0$ và $\beta > 0$ sao cho*

$$d(x, Sol(C, G)) \leq \beta \left\| x - Pr_C\left[x - \frac{1}{\rho}(Qx + q)\right]\right\|,$$

với mọi $x \in C$ và

$$\left\| x - Pr_C\left[x - \frac{1}{\rho}(Qx + q)\right]\right\| \leq \epsilon,$$

trong đó $d(x, Sol(C, G)) = \min\{\|x - y\| : y \in Sol(C, G)\}$ và Pr_C là phép chiếu trực giao lên C.

Bổ đề 1.7. [59, Bổ đề 3.1] *Cho $G(x) = Qx + q$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, với ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ và $Sol(C, G)$ là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$. Giả sử $S_1, \ldots, S_r$ là các thành phần liên thông của $Sol(C, G)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) *$Sol(C,G) = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$;*

(ii) *S_i là hợp của hữu hạn các tập lồi đa diện;*

(iii) *Với mỗi tập S_i $(i = 1, \dots, r)$, luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(x, S_j) \geq \delta$ với mọi $x \in S_i$ và $i \neq j$;*

(iv) *Hàm số $f_0 = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle$ nhận giá trị hằng trên mỗi tập S_i.*

Bổ đề 1.8. [87, Bổ đề 2.5] *Cho $\{a_n\}$ là dãy số thực không âm thỏa mãn điều kiện: $a_{n+1} \leq (1 - \lambda_n)a_n + \lambda_n\gamma_n$, $\forall n \geq 1$, trong đó $\{\lambda_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực sao cho*

(i) *$\{\lambda_n\} \subset [0, 1]$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$,*

(ii) *$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n \leq 0$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\gamma_n| < \infty$.*

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bổ đề 1.9. [93, Bổ đề 2] *Giả sử $T : C \to C$ là ánh xạ giả co chặt với hằng số ζ. Khi đó, ánh xạ $Id - T$ là nửa đóng tại 0, nghĩa là, nếu $\{x_n\}$ là dãy trong C sao cho $x_n \rightharpoonup x \in C$ và $(Id - T)x_n \to 0$, thì $(Id - T)x = 0$.*

Bổ đề 1.10. [89, Bổ đề 3.1] *Cho $\lambda \in (0, 1], T : C \to \mathbb{H}$ là ánh xạ không giãn và ánh xạ $T^{\lambda} : C \to \mathbb{H}$ được xác định bởi*

$$T^{\lambda}x := Tx - \lambda\mu F(Tx), \ \forall x \in C,$$

trong đó $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là $\kappa-$Lipschitz và $\beta-$đơn điệu mạnh. Khi đó, ánh xạ T^{λ} co với hằng số $0 < \mu < \dfrac{2\beta}{\kappa^2}$. Tức là

$$\|T^{\lambda}x - T^{\lambda}y\| \leq (1 - \lambda\tau)\|x - y\|, \ \forall x, y \in C,$$

trong đó $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu\kappa^2)} \in (0, 1]$.

Bổ đề 1.11. [34, Định lý 1] *Cho không gian Banach X với ánh xạ đối ngẫu liên tục yếu, C là tập con lồi đóng trong X và $T : C \to C$ là ánh xạ tiệm cận không giãn có $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Khi đó, ánh xạ $Id - T$ là nửa đóng tại điểm 0.*

Bổ đề 1.12. [90, Bổ đề 3.1] *Cho $S : C \to C$ là ánh xạ giả co chặt với hằng số ζ. Gọi $\bar{\gamma}$ và $\bar{\delta}$ là hai số thực không âm. Giả sử rằng $(\bar{\gamma} + \bar{\delta})\zeta \leq \bar{\gamma}$. Khi đó ta có*

$$\|\bar{\gamma}(x - y) + \bar{\delta}(Sx - Sy)\| \leq (\bar{\gamma} + \bar{\delta})\|x - y\|, \ \forall x, y \in C.$$

1.2 Bài toán cân bằng hai cấp

1.2.1 Định nghĩa và các bài toán liên quan

Cho $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$. Gọi C là tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathbb{H}$. Bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C,g,f)$ được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C,g) \text{ sao cho } f(\hat{x},y) \geq 0,\ \forall y \in Sol(C,g),$$

trong đó $g : C \times C \to \mathbb{R}$ và $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là các song hàm thỏa mãn điều kiện $g(x,x) = 0,\ \forall x \in C$; $f(x,x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{H}$ và $Sol(C,g)$ là tập nghiệm của bài toán $EP(C,g)$. Nghĩa là,

$$Sol(C,g) = \{x^* \in C : g(x^*,y) \geq 0,\ \forall y \in C\}. \tag{1.2}$$

Bài toán cân bằng hai cấp bao hàm nhiều lớp bài toán quan trọng. Sau đây là một trong những số đó.

***Bài toán cân bằng**

Dễ thấy khi ta chọn song hàm $f \equiv 0$, tức là $f(x,y) = 0,\ \forall x,y \in \mathbb{H}$ thì bài toán $BEP(C,g,f)$ trở thành bài toán cân bằng $EP(C,g)$

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*,y) \geq 0,\ \forall x \in C.$$

***Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp**

Xét các song hàm g và f được xác định như sau

$$g(x,y) := \langle G(x), y-x\rangle,\ f(x,y) := \langle F(x), y-x\rangle,$$

trong đó G là ánh xạ từ C vào C và F là ánh xạ từ $\mathbb{H}$ vào $\mathbb{H}$. Khi đó, bài toán $BEP(C,g,f)$ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp $BVI(C,G,F)$

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C,G) \text{ sao cho } \langle F(\hat{x}), y-\hat{x}\rangle \geq 0,\ \forall y \in Sol(C,G),$$

trong đó $Sol(C,G)$ là tập được xác định như sau

$$Sol(C,G) = \{x^* \in C : \langle G(x^*), y-x^*\rangle \geq 0,\ \forall y \in C\}.$$

Thật vậy, khi xét song hàm $f(x,y) = \langle F(x), y-x\rangle$ thì hai bài toán $EP(C,f)$ và $VI(C,F)$ là tương đương theo nghĩa chúng có tập nghiệm trùng nhau.

***Bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân**

Ta chọn song hàm $g(x,y) := \langle G(x), y-x\rangle$, trong đó G là ánh xạ từ C vào C. Khi đó, bài toán $BEP(C,g,f)$ trở thành bài toán

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C,G) \text{ sao cho } f(\hat{x},y) \geq 0,\ \forall y \in Sol(C,G), \tag{1.3}$$

trong đó $Sol(C,G)$ là tập nghiệm của bài toán $VI(C,G)$, tức là

$$Sol(C,G) = \{x^* \in C : \langle G(x^*), y - x^*\rangle \geq 0,\ \forall y \in C\}.$$

***Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán cân bằng**

Đặt $f(x,y) := \langle F(x), y-x\rangle$, với F là ánh xạ từ $\mathbb{H}$ vào $\mathbb{H}$, thì bài toán $BEP(C,g,f)$ trở thành

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C,g) \text{ sao cho } \langle F(\hat{x}), y-\hat{x}\rangle \geq 0,\ \forall y \in Sol(C,g), \tag{1.4}$$

trong đó $Sol(C,G)$ là tập được xác định như sau

$$Sol(C,g) = \{x^* \in C : g(x^*,y) \geq 0,\ \forall y \in C\}.$$

Đây chính là bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng.

Ta có thể nói rằng, các bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân hai cấp, bài toán cân bằng trên tập nghiệm bất đẳng thức biến phân và ngược lại đều là các trường hợp riêng của bài toán cân bằng hai cấp. Việc tìm thuật giải cho bài toán cân bằng hai cấp, có thể giải quyết được nhiều lớp bài toán con. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng. Chẳng hạn như, thuật toán giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân, có thể không mở rộng để giải bài toán cân bằng hai cấp.

1.2.2 Điều kiện tồn tại nghiệm

Trước hết chúng tôi nhắc lại một số kết quả về sự tồn tại nghiệm, tính chất tập nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C,g)$.

Định lý 1.2. [53, Định lý 4.14] *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, $g : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng, giả đơn điệu sao cho* *với mỗi $x \in C$, $g(.,x)$ bán liên tục và $g(x,.)$ lồi, nửa liên tục dưới trên C. Giả sử điều kiện bức sau được thỏa mãn:*

Tồn tại tập compact $W \subset C$ sao cho: $\forall x \in C \setminus W$, $\exists y \in W$: $g(x,y) < 0$.

Khi đó, bài toán cân bằng $EP(C,g)$ có ít nhất một nghiệm.

Định lý 1.3. [53, Định lý 4.15] *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện cân bằng. Khi đó, nếu các điều kiện trong Bổ đề 1.2 được thỏa mãn, đồng thời K lồi thì tập nghiệm $Sol(C,g)$ được xác định bởi* (1.2) *là một tập lồi đóng khác rỗng trong C.*

Sau đây là kết quả về tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C,g,f)$.

Định lý 1.4. [77, Mệnh đề 2.2] *Giả sử tập nghiệm $Sol(C,g)$ khác rỗng và f giả đơn điệu mạnh đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) *Với mỗi $y \in C, f(\cdot,y)$ là bán liên tục trên trên C;*

(ii) *Với mỗi $x \in C, f(x,\cdot)$ lồi, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên C.*

Khi đó, bài toán $BEP(C,g,f)$ có nghiệm duy nhất.

Gọi C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, $f,g : C \times C \to \mathbb{R}$, $\psi,\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là các song hàm. Xét bài toán cân bằng hai cấp hỗn hợp $(BMEP)$

$$\text{Tìm } \bar{x} \in S_{g,\varphi} \text{ sao cho } f(\bar{x},y) + \psi(y,\bar{x}) - \psi(\bar{x},\bar{x}) \geq 0,\ \forall y \in S_{g,\varphi},$$

trong đó $S_{g,\varphi}$ là tập được xác định bởi

$$S_{g,\varphi} = \{x^* \in C : g(x^*,y) + \varphi(y,x^*) - \varphi(x^*,x^*) \geq 0,\ \forall y \in C\}.$$

Nghĩa là, $S_{g,\varphi}$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } \bar{x} \in C \text{ sao cho } g(\bar{x},y) + \varphi(y,\bar{x}) - \varphi(\bar{x},\bar{x}) \geq 0,\ \forall y \in C. \tag{1.5}$$

Dễ thấy rằng, khi $\psi \equiv \varphi \equiv 0$ thì bài toán $(BMEP)$ trở thành bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C,g,f)$.

Định nghĩa 1.13. Cho không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$.

- Ánh xạ tuyến tính bị chặn $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ được gọi là δ-dương mạnh, nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$\langle T(x), x\rangle \geq \delta\|x\|^2,\ \forall x \in \mathbb{H}.$$

- Song hàm $\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ được gọi là đối xứng lệch (skew-symmetric), nếu
$$\varphi(u, u) - \varphi(u, v) - \varphi(v, u) + \varphi(v, v) \geq 0,\ \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Tính chất tập nghiệm của bài toán $(BMEP)$ được chỉ ra trong định lý sau đây.

Định lý 1.5. [38, Định lý 3.2] *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, K là tập compact trong $\mathbb{H}$ sao cho $C \cap K \neq \emptyset$. Gọi $g, f : C \times C \to \mathbb{R}, \psi, \varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ và $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) *Các song hàm g, f là β-đơn điệu mạnh và α-đơn điệu mạnh ngược tương ứng đồng thời là bán liên tục trên theo biến thứ nhất. Với mỗi $x \in C$ các hàm $g(x, \cdot), f(x, \cdot)$ lồi và nửa liên tục dưới trên C;*

(ii) *Ánh xạ T là toán tử δ-dương mạnh và tuyến tính bị chặn;*

(iii) *Các song hàm ψ, φ là đối xứng lệch, liên tục và lồi theo biến thứ nhất;*

(iv) *Mỗi $x \in \mathbb{H}$, tồn tại $y_0 \in C \cap K$ sao cho*
$$g(z, y_0) + \varphi(y_0, z) - \varphi(z, z) + \langle T(y_0 - z), z - x\rangle < 0, \quad \forall x \in C \setminus K.$$

Khi đó, nếu $\max\left\{\dfrac{\|T\|}{\delta + \rho\beta}, \dfrac{\|T\|}{\delta + \rho\alpha}\right\} < 1$ *thì ta có tập nghiệm của bài toán $(BMEP)$ là tập lồi, compact và khác rỗng trong C.*

1.2.3 Một số thuật giải cho bài toán cân bằng hai cấp

Trong những năm gần đây các thuật giải cho bài toán cân bằng hai cấp đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả [10, 25, 35, 52, 66, 85]. Sau đây chúng tôi điểm qua một số thuật giải có liên quan đến luận án.

a. Thuật toán điểm gần kề

Năm 2010, bằng sự kết hợp giữa phương pháp hàm phạt và phương pháp điểm gần kề, A. Moudafi [66] đã đề xuất thuật toán điểm gần kề cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ như sau:

Thuật toán 1.1. [66, Thuật toán 1.3]

$$\begin{cases} x^0 \in C, \ k = 0, \\ \text{Tìm } x^{k+1} \in C \text{ sao cho:} \\ f(x^{k+1}, y) + \epsilon_k g(x^{k+1}, y) + \frac{1}{r_k}\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \end{cases}$$

Dưới các giả thiết của song hàm f, g đơn điệu, bán liên tục trên theo biến thứ nhất, lồi và liên tục dưới theo biến thứ hai, tác giả đã chỉ ra được sự hội tụ của thuật toán thông qua định lý:

Định lý 1.6. [66, Định lý 2.3] *Giả sử $Sol(C, g) \neq \emptyset$, với mỗi $y \in C$ hàm $f(., y)$ nửa liên tục trên theo biến thứ nhất và bị chặn với mỗi $y \in Sol(C, g)$. Khi đó, nếu $\liminf_k r_k > 0$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} r_k \epsilon_k < +\infty$ thì*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x^{k+1} - x^k\|^2 < +\infty$$

và dãy $\{x^k\}$ sinh ra bởi thuật toán 1.1 hội tụ yếu về một điểm thuộc $Sol(C, g)$. Hơn nữa, nếu thêm điều kiện $\|x^{k+1} - x^k\| < o(\epsilon_k)$, thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu về một nghiệm của bài toán $BEP(C, g, f)$.

Ưu điểm của thuật toán trên là tính đơn giản của nó tại mỗi bước lặp. Tuy nhiên, hạn chế lớn của thuật toán này là tại mỗi bước lặp, ta phải tìm một nghiệm chính xác của một bài toán cân bằng phụ. Hơn nữa, để đảm bảo sự hội tụ của thuật toán ta cần phải chọn dãy tham số $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn điều kiện $\|x^{k+1} - x^k\| < o(\epsilon_k)$. Thực tế, điều này rất khó thực hiện khi chưa đánh giá được tốc độ hội tụ của dãy lặp $\{\|x^{k+1} - x^k\|\}$.

b. Thuật toán điểm gần kề cải tiến

Năm 2015, Z. Chbani và cộng sự [35] sử dụng khoảng cách Bregman tổng quát đã đề xuất thuật toán **D-PPA** cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Thuật toán được viết dưới dạng sau.

Thuật toán 1.2. [35, Thuật toán **D-PPA**]

$$\begin{cases} x^0 \in C, \ k = 0, \\ \text{Tìm } x^{k+1} \in C \text{ sao cho:} \\ r_k f(x^{k+1}, y) + \beta_k r_k g(x^{k+1}, y) + \langle \nabla_1 D(x^{k+1} - x^k), y - x^{k+1}\rangle + \delta_k \geq 0, \ \forall y \in C. \end{cases}$$

Khi đó, dưới điều kiện trên các tham số và tính đơn điệu tổng quát của các song hàm, các tác giả cũng đã chỉ ra sự hội tụ yếu của các dãy lặp.

c. Thuật toán tiến-lùi tách

Năm 2018, H. Riahi và các cộng sự [78] đã nghiên cứu đề xuất thuật toán **PFBSA** giải bài toán $BEP(C, g, f)$ như sau.

Thuật toán 1.3. [78, Thuật toán **PFBSA**]

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ k = 0, \\ \text{Tìm } x^{k+1} \in C : \lambda_k f(y, x^{k+1}) + \langle x^{k+1} - (x^k - \lambda_k \alpha_k v^k), y - x^{k+1} \rangle \geq 0,\ \forall y \in C, \\ \text{ ở đây } v^k \in \mathbb{H} \text{ sao cho } -g(y, x^k) + \langle v^k, x^k - y \rangle \geq 0,\ \forall y \in C. \end{cases}$$

Dưới các giả thiết giả đơn điệu của các song hàm, các tác giả cũng đã chỉ ra sử hội tụ mạnh của các dãy lặp tới một nghiệm của bài toán $BEP(C, g, f)$.

Định lý 1.7. [78, Định lý 4.2] *Giả sử f, g thỏa mãn các điều kiện lồi, nửa liên tục dưới theo biến thứ hai, bán liên tục trên theo biến thứ nhất và giả đơn điệu. Hơn nữa, song hàm g giả đơn điệu và thỏa mãn điều kiện bức với hằng số c. Các dãy tham số $\{\lambda_k\}, \{\alpha_k\}$ thỏa mãn $\sum \lambda_k = +\infty, \sum \lambda_k^2 < +\infty$, với mỗi $k > 0$, $\lambda_k \alpha_k < M,\ \forall M \in (0, 4c)$. Đồng thời thỏa mãn*

$$\forall x \in Sol(C, g),\ \forall p \in N_{Sol(C,g)}(x),\ \sum_k \lambda_k \alpha_k \left[g_x^* \left(\frac{p}{\alpha_k} \right) - \sigma_{Sol(C,g)} \left(\frac{p}{\alpha_k} \right) \right] < +\infty. \tag{1.6}$$

Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh ra bởi thuật toán **PFBSA** *hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất $\bar{x}$ của bài toán $BEP(C, g, f)$.*

Kết luận Chương 1

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm, các kết quả quan trọng trong giải tích hàm, lý thuyết tối ưu trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ như: Tập lồi, hàm lồi, phép chiếu, các dạng đơn điệu của song hàm, khoảng cách Hausdorff, ... Đặc biệt khái niệm dưới vi phân được dùng rất nhiều trong các chương sau. Bên cạnh đó khái niệm về bài toán cân bằng hai cấp, điều kiện tồn tại nghiệm và một số thuật giải cũng được trình bày tóm tắt trong chương này.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU DƯỚI ĐẠO HÀM

Năm 2011, P. Santos và cộng sự [82] đã đề xuất phương pháp chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ (kết hợp của dưới đạo hàm xấp xỉ và phương pháp chiếu) cho bài toán $EP(C, f)$, trong đó tại mỗi bước lặp chúng ta chỉ cần tính dưới vi phân xấp xỉ của một hàm lồi và thực hiện một phép chiếu lên tập lồi C. Trong khi đối với các phương pháp khác, tại mỗi bước lặp chúng ta thường phải giải một hoặc một số bài toán phụ dẫn đến chi phí tính toán lớn hơn. Bên cạnh đó, trong những năm gần đây, thuật ngữ quán tính đã được sử dụng khá phổ biến trong các thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Nó được coi là một kỹ thuật để tăng tốc độ hội tụ của các thuật toán. Điểm chung của các thuật toán kiểu quán tính là dãy lặp hiện tại phụ thuộc vào sự kết hợp của hai dãy lặp trước đó [4, 73]. Sự thay đổi nhỏ này đã giúp cải thiện đáng kể hiệu quả tính toán của các thuật toán kiểu quán tính. Gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã áp dụng thuật toán kiểu quán tính vào giải các bài toán bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, bài toán cân bằng, bài toán chấp nhận tách và một số bài toán tối ưu khác [32, 42, 74, 83]. Hơn nữa, hiệu quả tính toán của các thuật toán kiểu quán tính đã được chỉ ra thông qua nhiều ví dụ tính toán số và ứng dụng.

Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1] và [CT4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

2.1 Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ

Từ những ưu điểm trên, trong mục này chúng tôi phát triển, mở rộng phương pháp chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$.

2.1.1 Thuật toán

Trước hết chúng tôi đưa ra một số giả thiết sau đây.

(A_1) Với mỗi $x \in C$, ta có $g(x, \cdot)$ khả dưới vi phân trên C, $g(x, \cdot)$ và $f(x, \cdot)$ lồi và nửa liên tục dưới trên toàn không gian $\mathbb{H}$. Hơn nữa, nếu $\{x^k\}$ bị chặn trên C và $\epsilon_k \searrow 0$ khi $k \to \infty$, thì dãy $\{w^k\}$ với $w^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k)$ cũng bị chặn.

(A_2) Song hàm g giả đơn điệu trên C và thỏa mãn điều kiện para-đơn điệu. Nghĩa là, với mỗi $x^* \in Sol(C, g)$

$$\bar{x} \in C : g(\bar{x}, x^*) = g(x^*, \bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} \in Sol(C, g).$$

(A_3) Với mỗi $y \in C$, ta có $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu trên C.

(A_4) Tập nghiệm $Sol(C, g)$ khác rỗng.

(A_5) Song hàm f là β-đơn điệu mạnh trên $\mathbb{H}$, với mỗi $\epsilon \geq 0$, $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$ compact và liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ sao cho $\beta \leq L$.

Sau đây là một ví dụ cho lớp song hàm thỏa mãn điều kiện (A_5).

Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Xét song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x, y) = \langle G(x) + Qy + q, y - x \rangle$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đối xứng, nửa xác định dương, $q \in \mathbb{R}^n$, G liên tục Lipschitz với hằng số L và đơn điệu mạnh với hằng số $\eta > \|Q\|$. Trong bài báo [75], các tác giả đã chỉ ra được rằng

- f đơn điệu mạnh với hằng số $\eta - \|Q\|$.
- f liên tục Lipschitz với hằng số $c_1,\ c_2$ sao cho

$$2\sqrt{c_1 c_2} \geq L + \|Q\|.$$

Ở đây chúng tôi sẽ chỉ ra $\partial_2 f(x, x)$ thỏa mãn điều kiện (A_5). Thật vậy, tính compact là hiển nhiên. Mặt khác $\partial_2 f(x, x) = \{G(x) + Qx + q\}$, lấy $u \in \partial_2 f(x, x)$ và $v \in \partial_2 f(y, y)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\langle u - v, x - y \rangle &= \langle G(x) - G(y) + Q(x - y), x - y \rangle \\
&= \langle G(x) - G(y), x - y \rangle + \langle Q(x - y), x - y \rangle \\
&\geq \eta \|x - y\|^2 + \lambda_{\min}(Q) \|x - y\|^2 \\
&= (\eta + \lambda_{\min}(Q)) \|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó $\partial_2 f(x,x)$ đơn điệu mạnh với hằng số $\eta + \lambda_{\min}(Q)$. Lại có

$$\begin{aligned} d_H(\partial_2 f(x,x), \partial_2 f(y,y)) &= \|G(x) - G(y) + Q(x-y)\| \\ &\geq L\|x-y\| + \|Q\|\|x-y\| \\ &= (L + \|Q\|)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Nói các khác $\partial_2 f(x,x)$ liên tục Lipschitz với hằng số $L + \|Q\|$.

Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán $BEP(C,g,f)$ được mô tả dưới dạng sau.

Thuật toán 2.1. *(Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ)*

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$ và các dãy số thực không âm $\{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}$, $\{\xi_k\}, \{\eta_k\}, \{\rho_k\}$, $\{\tau_k\}$, gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$x^{k+1} = P_C(y^k - \eta_k u^k), \tag{2.1}$$

trong đó

$$\begin{cases} g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k), \\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \text{ với } \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\}, \\ y^k \in C : \langle \alpha_k g^k + y^k - x^k, x - y^k \rangle \geq -\xi_k, \ \forall x \in C, \\ u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \tag{2.2}$$

Bước 2. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại, gán $k := k+1$, và quay trở lại ***Bước 1***.

2.1.2 Sự hội tụ

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán này, chúng tôi cần sử dụng tới một số kết quả sau.

Bổ đề 2.1. [82, Bổ đề 2.4] *Cho x, b và c là các số thực không âm thỏa mãn*

$$x^2 - bx - c \leq 0.$$

Khi đó,

$$bx \leq b^2 + c.$$

Bổ đề 2.2. *Giả sử C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$ và với mỗi $x \in C$, $g(x,\cdot)$ lồi, khả dưới vi phân và nửa liên tục dưới trên C. Khi đó, nếu g thỏa mãn điều kiện (A_5) thì ánh xạ đa trị*

$$S(x) = \big\{x - \tau\omega_x : \omega_x \in \partial_2^{\epsilon} g(x,x)\big\},\ \forall x \in C$$

là $2\sqrt{\tau\epsilon}-$co với hằng số $\delta = \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)}$, trong đó $\tau \in (0; \frac{2\beta}{L^2})$.

Chứng minh. Từ định nghĩa của dưới đạo hàm xấp xỉ, ta có

$$\begin{aligned} g(x,y) &\geq \langle \omega_x, y - x\rangle - \epsilon,\ \forall \omega_x \in \partial_2^{\epsilon} g(x,x); \\ g(y,x) &\geq \langle \omega_y, x - y\rangle - \epsilon,\ \forall \omega_y \in \partial_2^{\epsilon} g(y,y). \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức này và sử dụng tính $\beta-$đơn điệu mạnh của hàm song hàm g. Khi đó, với mọi $x, y \in C$, $\omega_x \in \partial_2^{\epsilon} g(x,x)$, $\omega_y \in \partial_2^{\epsilon} g(y,y)$, ta thu được

$$\langle \omega_x - \omega_y, y - x\rangle - 2\epsilon \leq g(x,y) + g(y,x) \leq -\beta\|x - y\|^2. \tag{2.3}$$

Đặt $A = \partial_2^{\epsilon} g(x,x); B = \partial_2^{\epsilon} g(y,y)$. Sử dụng bất đẳng thức (2.3), tính liên tục Lipschitz của $\partial_2^{\epsilon} g(x,x)$, ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}
&\Big(d_H\big(S(x), S(y)\big)\Big)^2 \\
&= \max\Big\{\sup_{\omega_x \in A}\inf_{\omega_y \in B}\|x - \tau\omega_x - (y - \tau\omega_y)\|^2, \sup_{\omega_y \in B}\inf_{\omega_x \in A}\|x - \tau\omega_x - (y - \tau\omega_y)\|^2\Big\} \\
&= \|x - y\|^2 + \max\Big\{\sup_{\omega_x \in A}\inf_{\omega_y \in B}[2\tau\langle \omega_x - \omega_y, y - x\rangle + \tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2], \\
&\qquad \sup_{\omega_y \in B}\inf_{\omega_x \in A}[2\tau\langle \omega_x - \omega_y, y - x\rangle + \tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2]\Big\} \\
&\leq \|x - y\|^2 + \max\Big\{\sup_{\omega_x \in A}\inf_{\omega_y \in B}[2\tau(-\beta\|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2], \\
&\qquad \sup_{\omega_y \in B}\inf_{\omega_x \in A}[2\tau(-\beta\|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2]\Big\} \\
&\leq \|x - y\|^2 + 2\tau(-\beta\|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \max\Big\{\sup_{\omega_x \in A}\inf_{\omega_y \in B}[\tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2], \\
&\qquad \sup_{\omega_y \in B}\inf_{\omega_x \in A}[\tau^2\|\omega_x - \omega_y\|^2]\Big\} \\
&= \|x - y\|^2 + 2\tau(-\beta\|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2\big(d_H(A,B)\big)^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\tau\beta\|x - y\|^2 + 4\tau\epsilon + \tau^2 L^2\|x - y\|^2
\end{aligned}$$

$$= \; [1 - \tau(2\beta - \tau L^2)]\|x - y\|^2 + 4\tau\epsilon.$$

Do A, B compact nên tồn tại $\overline{\omega_x} \in A, \overline{\omega_y} \in B$ sao cho $d_H(A, B) = \|\overline{\omega_x} - \overline{\omega_y}\|^2$. Kết hợp với (2.3) ta được

$$\begin{aligned} -\beta\|x - y\|^2 &\geq -\|\overline{\omega_x} - \overline{\omega_y}\|\|x - y\| - 2\epsilon \\ &= -d_H(A, B)\|x - y\| - 2\epsilon \\ &\geq -L\|x - y\|^2 - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Dẫn tới $(\beta - L)\|x - y\|^2 \leq 2\epsilon$ với mọi $x, y \in C$. Từ giả thiết $0 < \beta \leq L$ suy ra $1 - \tau(2\beta - \tau L^2) > 0$. Do đó

$$d_H\big(S(x), S(y)\big) \leq \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)}\|x - y\| + 2\sqrt{\tau\epsilon}.$$

Nói các khác ánh xạ đa trị S là $2\sqrt{\tau\epsilon}-$co với hằng số $\delta = \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)} \in (0; 1)$ trên C. ■

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý hội tụ của thuật toán. Giả sử các dãy $\{\alpha_k\}, \{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}, \{\xi_k\}, \{\eta_k\}, \{\rho_k\}, \{\tau_k\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \tau < \beta, \\ \eta_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{2\beta}\right\}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k = \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k^2 < \infty, \\ \tau_k \leq \eta_k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \tau_k < \infty, \\ \delta_k = 2(\alpha_k\epsilon_k + \beta_k^2 + \xi_k), \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\eta_k} = 0, \\ \inf_k \rho_k = \rho > 0, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\epsilon_k < \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

Một ví dụ về các dãy tham số thỏa mãn (2.4) là $\eta_k := \frac{1}{k+10}$, $\rho_k = 200 + k$, $\beta_k = \frac{1}{7k+1}$, $\xi_k = \tau_k = \epsilon_k = 0$.

Sự hội tụ của Thuật toán 2.1 tới nghiệm của bài toán $BEP(C, g, f)$ được phát biểu thông qua định lý sau.

Định lý 2.1. *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Các song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ và $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện nêu trong (A_1) đến (A_5). Gọi $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ là các dãy sinh ra bởi Thuật toán 2.1. Khi đó dưới các điều kiện của các tham số hiệu chỉnh (2.4), các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$.*

Chứng minh. Gọi x^* là nghiệm duy nhất của bài toán $BEP(C, g, f)$. Định lý được chứng minh thông qua các khẳng định sau:

Khẳng định 2.1. Chúng ta có bất đẳng thức sau

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1 - \tau\eta_k)g(x^k, x^*) + \delta_k + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau},$$

trong đó, $\delta_k = 2(\alpha_k\epsilon_k + \beta_k^2 + \xi_k)$ và $w_k^* \in \partial_2^{\tau_k} f(x^*, x^*)$ sao cho $x^* - \eta_k w_k^* = Pr_{x^* - \eta_k \partial_2^{\tau_k} f(x^*, x^*)}(y^k - \eta_k u^k)$. Hơn nữa các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ bị chặn và thỏa mãn

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Thật vậy, ta đặt $A_k(x) = \{x - \eta_k\partial_2^{\tau_k} f(x, x) : x \in \mathbb{H}\}$. Do f khả dưới vi phân theo biến thứ 2 trên $\mathbb{H}$ nên $\partial_2^{\tau_k} f(x, x) \neq \emptyset,\ \forall x \in \mathbb{H}$. Từ điều kiện (2.4) suy ra

$$\beta - \tau > 0, L^2 - \tau^2 > 0, \eta_k < \frac{2(\beta - \tau)}{L^2 - \tau^2}.$$

Do đó $\sqrt{1 - \eta_k(2\beta - \eta_k L^2)} < 1 - \tau\eta_k$. Áp dụng Bổ đề 2.2 và tính không giãn của Pr_C, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|Pr_C(y^k - \eta_k u^k) - Pr_C(x^*)\| \\
&\leq \|y^k - \eta_k u^k - x^*\| \\
&\leq \|y^k - \eta_k u^k - (x^* - \eta_k w_k^*)\| + \eta_k\|w_k^*\| \\
&\leq \rho\left(A_k(y^k), A_k(x^*)\right) + \eta_k\|w_k^*\| \\
&\leq \rho_k\|y^k - x^*\| + 2\sqrt{\eta_k\tau_k} + \eta_k\|w_k^*\| \\
&\leq (1 - \tau\eta_k)\|y^k - x^*\| + \eta_k(2 + \|w_k^*\|)
\end{aligned}$$

với $\rho_k = \sqrt{1 - \eta_k(2\beta - \eta_k L^2)}$. Bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \left[(1 - \tau\eta_k)\|y^k - x^*\| + \eta_k(2 + \|w_k^*\|)\right]^2 \\
&= \left[(1 - \tau\eta_k)\|y^k - x^*\| + \tau\eta_k\frac{2 + \|w_k^*\|}{\tau}\right]^2 \\
&\leq (1 - \tau\eta_k)\|y^k - x^*\|^2 + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Từ (2.2) và $x^* \in C, x^k \in conv(C, x^k) := \Big\{\tau x + (1 - \tau)y : x, y \in C \cup \{x^k\}, \tau \in [0, 1]\Big\}$, ta có

$$\langle x^k - y^k, x^* - y^k\rangle \leq \alpha_k\langle g^k, x^* - y^k\rangle + \xi_k,$$

và

$$\begin{aligned}\|y^k - x^k\|^2 &\le \alpha_k \langle g^k, x^k - y^k\rangle + \xi_k \\ &\le \alpha_k \|g^k\| \ \|y^k - x^k\| + \xi_k \le \beta_k \|y^k - x^k\| + \xi_k \\ &\le \beta_k^2 + \xi_k, \end{aligned} \tag{2.6}$$

bất đẳng thức cuối thu được từ việc áp dụng Bổ đề 2.1 với $x := \|y^k - x^k\|, b := \beta_k$ và $c := \xi_k$.

Lại có,

$$\begin{aligned}\|y^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 + 2\langle x^k - y^k, x^* - y^k\rangle \\ &\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle x^k - y^k, x^* - y^k\rangle \\ &\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\langle g^k, x^* - x^k\rangle + 2(\alpha_k\langle g^k, x^k - y^k\rangle + \xi_k) \\ &\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\langle g^k, x^* - x^k\rangle + 2(\beta_k\|x^k - y^k\| + \xi_k) \\ &\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\langle g^k, x^* - x^k\rangle + 2(\beta_k^2 + \xi_k) \\ &\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k, \end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó, bất đẳng thức cuối có được từ $g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k)$ hay $\langle g^k, x^* - x^k\rangle \le g(x^k, x^*) - g(x^k, x^k) + \epsilon_k = g(x^k, x^*) + \epsilon_k$.

Mặt khác, từ $g(x^*, x^k) \ge 0$ và tính giả đơn điệu của song hàm g, suy ra $g(x^k, x^*) \le 0$. Kết hợp điều này với (2.5) và (2.7), ta thu được

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\le (1 - \tau\eta_k)\|y^k - x^*\|^2 + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\ &\le (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1 - \tau\eta_k)g(x^k, x^*) + \delta_k(1 - \tau\eta_k) + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\ &\le (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + \delta_k + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\ &\le (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + \tau\eta_k K \\ &\le \max\{\|x^k - x^*\|^2, K\} \\ &\le ... \\ &\le \max\{\|x^0 - x^*\|^2, K\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

ở đây,

$$K = \frac{1}{\tau}\sup_k \left\{\frac{\delta_k}{\eta_k} + \frac{(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau}\right\} < +\infty.$$

Dẫn tới, $\{x^k\}$ bị chặn.

Từ (2.6), suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0$, do đó $\{y^k\}$ cũng bị chặn. Sử dụng tính nửa liên tục trên của $\partial_2^{\tau_k} f$ và $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$, chúng ta cũng thu được $\{u^k\}$ bị chặn và do đó

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - y^k\| = \lim_{k\to\infty} \|Pr_C(y^k - \eta_k u^k) - Pr_C(y^k)\| \leq \lim_{k\to\infty} \eta_k \|u^k\| = 0.$$

Vậy Khẳng định 2.1 được chứng minh.

Khẳng định 2.2. Ta có

$$a_{k+1} \leq a_k - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2 \|u^k\|^2 + 2\eta_k \tau_k,$$

với $a_k = \|x^k - x^*\|^2 - 2\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j (1 - 2\eta_j\beta) g(x^j, x^*) - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j (1 - 2\eta_j \beta)$.

Thật vậy, từ định nghĩa của x^{k+1} và (2.7), dẫn tới

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|(y^k - x^*) - \eta_k u^k\|^2 \\
&= \|y^k - x^*\|^2 - 2\eta_k \langle u^k, y^k - x^*\rangle + \eta_k^2 \|u^k\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k - 2\eta_k \langle u^k, y^k - x^*\rangle + \eta_k^2 \|u^k\|^2. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Do $u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k)$ và tính đơn điệu mạnh của song hàm f, ta thu được

$$\begin{aligned}
-f(x^*, y^k) - \beta\|y^k - x^*\|^2 + \tau_k &\geq f(y^k, x^*) + \tau_k \\
&= f(y^k, x^*) - f(y^k, y^k) + \tau_k \\
&\geq \langle u^k, x^* - y^k\rangle.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.7) và (2.9), ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - 2\eta_k\beta)\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1 - 2\eta_k\beta) g(x^k, x^*) + \delta_k (1 - 2\eta_k\beta) \\
&\qquad - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2 \|u^k\|^2 + 2\eta_k \tau_k \qquad (2.10) \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1 - 2\eta_k\beta) g(x^k, x^*) + \delta_k (1 - 2\eta_k\beta) \\
&\qquad - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2 \|u^k\|^2 + 2\eta_k \tau_k.
\end{aligned}$$

Tương đương với

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 - 2\sum_{j=0}^{k} \alpha_j (1 - 2\eta_j\beta) g(x^j, x^*) - \sum_{j=0}^{k} \delta_j (1 - 2\eta_j\beta)$$

$$\leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(1-2\eta_j\beta) g(x^j, x^*) - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j (1-2\eta_j\beta)$$
$$- 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2 \|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k.$$

Hay $a_{k+1} \leq a_k - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k$. Do đó, Khẳng định 2.2 được chứng minh.

Khẳng định 2.3. Các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ theo chuẩn tới x^*.

Thật vậy, chúng ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Giả sử tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k+1} \leq a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Điều này có nghĩa là

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1-2\eta_k\beta) g(x^k, x^*) + \delta_k(1-2\eta_k\beta) \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + \delta_k. \end{aligned}$$

Lại có $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$, nên theo Bổ đề 1.2, suy ra tồn tại giới hạn

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^2 = c < \infty, \text{ và do đó } \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k (1-2\eta_k\beta) \left[-g(x^k, x^*)\right] < \infty.$$

Mặt khác, từ điều kiện (2.4)

$$\frac{\gamma_k}{\rho_k} = \max\left\{1, \rho_k^{-1}\|g^k\|\right\} \leq \frac{\mathcal{L}}{\rho}, \ \forall k,$$

trong đó $\rho = \inf_k \rho_k > 0, \|g^k\| \leq \mathcal{L} < +\infty$. Suy ra

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k} \geq \frac{\rho}{\mathcal{L}} \frac{\beta_k}{\rho_k}, \ \forall k.$$

Do đó,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} \left[-g(x^k, x^*)\right] < \infty.$$

Dẫn đến,

$$\limsup_{k\to\infty} g(x^k, x^*) = 0.$$

Bởi vậy, tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của $\{x^k\}$ sao cho

$$\limsup_{k\to\infty} g(x^k, x^*) = \lim_{j\to\infty} g(x^{k_j}, x^*) = 0.$$

Mà $\{x^k\}$ bị chặn (Khẳng định 2.1), suy ra $\{x^{k_j}\}$ cũng bị chặn. Do đó, tồn tại $\bar{x} \in C$ và một dãy con của $\{x^{k_j}\}$, (để thuận tiện, ta vẫn ký hiệu dãy con này là $\{x^{k_j}\}$), hội tụ yếu tới $\bar{x}$. Áp dụng tính chất nửa liên tục trên của $g(\cdot, x^*)$, ta thu được

$$0 \geq g(\bar{x}, x^*) \geq \limsup_{j\to\infty} g(x^{k_j}, x^*) = \limsup_{k\to\infty} g(x^k, x^*) = 0.$$

Suy ra $g(\bar{x}, x^*) = 0$. Kết hợp với giả thiết (A_2) dẫn đến $\bar{x} \in Sol(C, g)$.
Từ (2.10), ta có

$$a_{k+1} \leq (1 - 2\eta_k\beta)a_k + \delta_k - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k.$$

Suy ra

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} a_k \leq \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\delta_k}{2\eta_k\beta} + \frac{\eta_k\|u^k\|^2}{2\beta} - \frac{1}{\beta}f(x^*, y^k)\right] \leq -\frac{1}{\beta}\liminf_{k\to\infty} f(x^*, y^k). \quad (2.11)$$

Bất đẳng thức cuối có được từ điều kiện (2.4).
Do $\{x^k\}$ bị chặn và $\lim_{k\to\infty}\|x^k - y^k\| = 0$, chúng ta có thể giả sử rằng $\{y^{k_j}\} \subset \{y^k\}$ hội tụ yếu về $\bar{x} \in Sol(C, g)$, sử dụng tính chất nửa liên tục dưới yếu của $f(x^*, \cdot)$, ta có $\liminf_{j\to\infty} f(x^*, y^{k_j}) \geq f(x^*, \bar{x}) \geq 0$. Kết hợp điều này với (2.11) suy ra $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Như vậy, trong trường hợp này chúng ta đã chỉ ra được dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ mạnh tới x^*.
Trường hợp 2. Giả sử không tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k+1} \leq a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Nói cách khác là tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$. Khi đó, trong Bổ đề 1.3 [60], P.E. Maingé xây dựng dãy chỉ số $\{\tau_k\}$ được xác định bởi

$$\tau_k = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\},$$

và tác giả đã chỉ ra dãy $\{\tau(k)\}$ thỏa mãn

$$\tau(k) \nearrow +\infty, 0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}, a_{\tau(k)} \leq a_{\tau(k)+1}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.12)$$

Áp dụng Khẳng định 2.2, ta thu được kết quả

$$\begin{aligned} 2\eta_{\tau(k)} f\left(x^*, y^{\tau(k)}\right) &\leq a_{\tau(k)} - a_{\tau(k)+1} + \eta_{\tau(k)}^2\|u^{\tau(k)}\|^2 + 2\eta_{\tau(k)}\tau_{\tau(k)} \\ &\leq \eta_{\tau(k)}^2\|u^{\tau(k)}\|^2 + 2\eta_{\tau(k)}\tau_{\tau(k)}. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ $\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\tau_k < +\infty$ kết hợp với tính bị chặn của $\{u^k\}$, chúng ta thu được

$$\liminf_{k\to\infty} f\left(x^*, y^{\tau(k)}\right) \leq 0 \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} f\left(x^*, y^{\tau(k)}\right) = 0.$$

Tiếp theo, bằng cách tương tự như (2.11), ta có

$$0 \le \lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)} \le -\frac{1}{\beta}\liminf_{k\to\infty} f(x^*, y^{\tau(k)}) = 0.$$

Điều này dẫn tới $\lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)} = 0$. Mặt khác, từ (2.1) và $\lim_{k\to\infty}\|x^k - y^k\| = 0$ (Khẳng định 2.1), ta có

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{k\to\infty} \|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \left[\|x^{\tau(k)+1} - y^{\tau(k)}\| + \|y^{\tau(k)} - x^{\tau(k)}\|\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\eta_{\tau(k)}\|u^{\tau(k)}\| + \|y^{\tau(k)} - x^{\tau(k)}\|\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)+1} = 0$. Kết hợp điều này với (2.12), chúng ta thu được $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Lại có $\lim_{k\to\infty}\|x^k - y^k\| = 0$, suy ra các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về x^*. Khẳng định 2.3 được chứng minh. Như vậy, Định lý 2.1 được chứng minh xong. ■

Chú ý 2.1. *Khi $f = 0$, bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ trở thành bài toán cân bằng $EP(C, g)$*

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) \ge 0,\ \forall x \in C.$$

Và khi đó, Thuật toán 2.1 được viết lại như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k),\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k},\ \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\} \\ y^k \in C : \langle \alpha_k g^k + y^k - x^k, x - y^k\rangle \ge -\xi_k,\ \forall x \in C. \end{cases} \tag{2.13}$$

Dễ thấy rằng (2.13) chính là phương pháp chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ **IPSM** cho bài toán cân bằng $EP(C, g)$ được đề xuất bởi S. Santos và S. Scheimberg trong [82]. Như vậy Thuật toán 2.1 chúng tôi đề xuất ở trên chính là một mở rộng của Thuật toán **IPSM**.

2.1.3 Ứng dụng cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm điểm bất động

Gọi C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, xét các song hàm cân bằng $g : C \times C \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ và ánh xạ không giãn

$S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tức là,

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Trong mục này, chúng tôi mở rộng Thuật toán 2.1 cho bài toán tổng quát hơn sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \ \text{ sao cho } f(x^*, x) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, \tag{2.14}$$

trong đó $\Omega := Sol(C, g) \cap Fix(S)$ với $Sol(C, g) := \{\bar{x} \in C : g(\bar{x}, y) \geq 0, \ \forall y \in C\}$ và $Fix(S) := \{x \in C : S(x) = x\}$. Khi S là ánh xạ đồng nhất, bài toán (2.14) trở thành bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Thuật toán được mô tả chi tiết như sau.

Thuật toán 2.2.

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$, và các dãy số thực dương $\{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}, \{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}, \{\rho_k\}, \{\tau_k\}$, gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$x^{k+1} = P_C(\bar{y}^k - \eta_k u^k), \tag{2.15}$$

trong đó

$$\begin{cases} g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k), \ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \ \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\} \\ y^k \in C \text{ sao cho } \langle \alpha_k g^k + y^k - x^k, x - y^k \rangle \geq -\xi_k, \ \forall x \in C \\ \bar{y}^k = \gamma_k x^k + (1 - \gamma_k) S(y^k) \\ u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(\bar{y}^k, \bar{y}^k). \end{cases} \tag{2.16}$$

Bước 2. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì Thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k + 1$, và quay về ***Bước 1***.

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán chúng tôi cần tới bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.3. [91, Trang 484] *Cho $\mathbb{H}$ là không gian Hilbert thực, $\{\gamma_k\}$ là một dãy các số thực thỏa mãn $0 < a \leq \gamma_k \leq b < 1$ với mọi $k = 0, 1, ...$ và $\{v^k\}, \{w^k\}$ là các dãy trong $\mathbb{H}$ sao cho*

$$\limsup_{k\to\infty} \|v^k\| \leq K, \ \limsup_{k\to\infty} \|w^k\| \leq K$$

và

$$\limsup_{k\to\infty} \|\gamma_k v^k + (1 - \gamma_k) w^k\| = K, \ \text{với mọi } K \geq 0.$$

Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty} \|v^k - w^k\| = 0.$

Sự hội tụ của Thuật toán 2.2 được phát biểu thông qua định lý sau.

Định lý 2.2. *Gọi C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Giả sử các song hàm cân bằng $g : C \times C \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $(A_1) - (A_3), (A_5)$ và $\Omega \neq \emptyset$, đồng thời các điều kiện (2.4) và $0 < e \leq \gamma_k \leq \bar{e} < 1$, $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = h \in [e, \bar{e}]$ được thỏa mãn. Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ sinh ra từ Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (2.14).*

Chứng minh. Gọi x^* là nghiệm duy nhất của bài toán (2.14). Bằng cách tương tự như (2.5) trong chứng minh Khẳng định 2.1, chúng ta thu được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\eta_k)\|\bar{y}^k - x^*\|^2 + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau},$$

và tương tự (2.7), ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k.$$

Mặt khác, do $\bar{y}^k = \gamma_k x^k + (1 - \gamma_k)S(y^k)$ suy ra

$$\begin{aligned}
\|\bar{y}^k - x^*\|^2 &= \|\gamma_k(x^k - x^*) + (1 - \gamma_k)[S(y^k) - x^*]\|^2 \\
&\leq \gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + (1 - \gamma_k)\|S(y^k) - S(x^*)\|^2 \\
&\leq \gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + (1 - \gamma_k)\|y^k - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Kết hợp $g(x^k, x^*) \leq 0$ và điều kiện (2.4), ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\eta_k)\|\bar{y}^k - x^*\|^2 + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\leq (1 - \tau\eta_k)\left[\gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + (1 - \gamma_k)\|y^k - x^*\|^2\right] + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\leq \gamma_k(1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\qquad + (1 - \gamma_k)(1 - \tau\eta_k)\left(\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k\right) \\
&\leq (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + (1 - e)\delta_k + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\qquad + 2\alpha_k(1 - \bar{e})(1 - \tau)g(x^k, x^*) \qquad (2.17) \\
&\leq (1 - \tau\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + (1 - e)\delta_k + \frac{\eta_k(2 + \|w_k^*\|)^2}{\tau}.
\end{aligned}$$

Dẫn tới, các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ bị chặn, hơn nữa

$$\lim_{k\to\infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - \bar{y}^k\| = 0.$$

Một cách tương tự như trong Khẳng định 2.2, chúng ta cũng có

$$
\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\quad = \|Pr_C(\bar{y}^k - \eta_k u^k) - Pr_C(x^*)\|^2 \\
&\quad \le \|\bar{y}^k - x^*\|^2 - 2\eta_k \langle u^k, \bar{y}^k - x^*\rangle + \eta_k^2 \|u^k\|^2 \\
&\quad \le \gamma_k \|x^k - x^*\|^2 + (1-\gamma_k)\|y^k - x^*\|^2 - 2\eta_k \langle u^k, \bar{y}^k - x^*\rangle + \eta_k^2\|u^k\|^2 \\
&\quad \le \|\bar{y}^k - x^*\|^2 - 2\eta_k \left[f(x^*, \bar{y}^k) + \beta \|\bar{y}^k - x^*\|^2 - \tau_k \right] + \eta_k^2 \|u^k\|^2 \\
&\quad = (1 - 2\beta\eta_k)\|\bar{y}^k - x^*\|^2 - 2\eta_k f(x^*, \bar{y}^k) + 2\eta_k\tau_k + \eta_k^2\|u^k\|^2 \\
&\quad \le (1-2\beta\eta_k)\left[\gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\gamma_k)\|y^k - x^*\|^2\right] - 2\eta_k f(x^*, \bar{y}^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k \\
&\quad \le (1-2\beta\eta_k)\left[\gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\gamma_k)\left(\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k\right)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\eta_k f(x^*, \bar{y}^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k \\
&\quad = (1-2\beta\eta_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k(1-\gamma_k)(1-2\beta\eta_k) g(x^k, x^*) \\
&\qquad\qquad\qquad + \delta_k(1-2\beta\eta_k) - 2\eta_k f(x^*, \bar{y}^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k.
\end{aligned}
$$

Nghĩa là ta có

$$\bar{a}_{k+1} \le \bar{a}_k - 2\eta_k f(x^*, y^k) + \eta_k^2\|u^k\|^2 + 2\eta_k\tau_k, \tag{2.18}$$

trong đó $\bar{a}_k = \|x^k - x^*\|^2 - 2\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j(1-2\eta_j\beta)(1-\gamma_k)g(x^j, x^*) - \sum_{j=0}^{k-1}\delta_j(1-2\eta_j\beta)$. Tiếp theo ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1a. Tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $\bar{a}_{k+1} \le \bar{a}_k$ với mọi $k \ge k_0$. Tương tự trường hợp 1 của Khẳng định 2.3, chúng ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^2 = \bar{c} < +\infty,$$

và tồn tại dãy con $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x} \in Sol(C, g)$. Mặt khác, S không giãn, nên

$$
\begin{aligned}
\|S(y^k) - x^*\|^2 &\le \|y^k - x^*\|^2 \\
&\le \|x^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k g(x^k, x^*) + \delta_k \\
&\le \|x^k - x^*\|^2 + \bar{e}\delta_k.
\end{aligned}
$$

điều này dẫn tới

$$\limsup_{k\to\infty} \|S(y^k) - x^*\| \le \lim_{k\to\infty}\left(\|x^k - x^*\|^2 + \bar{e}\delta_k\right) = \sqrt{\bar{c}}.$$

Từ (2.17), suy ra $\lim\limits_{k\to\infty}\|\bar{y}^k - x^*\|^2 = \bar{c}$. Nghĩa là, ta có

$$\lim_{k\to\infty}\|\bar{y}^k - x^*\| = \lim_{k\to\infty}\|\gamma_k(x^k - x^*) + (1-\gamma_k)[S(y^k) - x^*]\| = \sqrt{\bar{c}}.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 với $v^k = x^k - x^*$ và $w^k = S(y^k) - x^*$, chúng ta thu được

$$\lim_{k\to\infty} \|S(y^k) - x^k\| = 0,$$

do đó

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \|S(y^k) - y^k\| &\le \lim_{k\to\infty} [\|S(y^k) - x^k\| + \|x^k - y^k\|] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Để ý rằng $\{y^{k_j}\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x}$.
Tiếp theo chúng ta sẽ chỉ ra $S(\bar{x}) = \bar{x}$. Thật vật, giả sử $\bar{x} \neq S(\bar{x})$. Khi đó, từ $y^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, theo Định lý Opial và (2.19), ta thu được

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to\infty} \|y^{k_j} - \bar{x}\| &< \liminf_{j\to\infty} \|y^{k_j} - S(\bar{x})\| \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \left[\|y^{k_j} - S(y^{k_j})\| + \|S(y^{k_j}) - S(\bar{x})\|\right] \\ &\le \lim_{j\to\infty} \|y^{k_j} - S(y^{k_j})\| + \liminf_{j\to\infty} \|S(y^{k_j}) - S(\bar{x})\| \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \|y^{k_j} - \bar{x}\| \\ &= \bar{c},\end{aligned}$$

điều này là mâu thuẩn với giả sử trên. Bởi vậy, $\bar{x} \in Fix(S)$, suy ra $\bar{x} \in \Omega$.
Một cách tương tự như phần cuối của *trường hợp 1* trong chứng minh Khẳng định 2.3 chúng ta cũng thu được các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{\bar{y}^k\}$ hội tụ mạnh tới nghiệm x^* của bài toán (2.14).
Trường hợp 2a. Tồn tại số nguyên dương k_0 và một dãy con $\{\bar{a}_{\bar{\tau}(k)}\}$ của $\{\bar{a}_k\}$ thỏa mãn (2.12) sao cho $\bar{a}_{k_0} \le \bar{a}_{k_0+1}$ và $\lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\bar{\tau}(k)} = \bar{M} < +\infty$. Từ (2.18), dẫn tới

$$2\eta_{\bar{\tau}(k)} f\left(x^*, y^{\bar{\tau}(k)}\right) \le \bar{a}_{\bar{\tau}(k)} - \bar{a}_{\bar{\tau}(k)+1} + \eta^2_{\bar{\tau}(k)} \|u^{\bar{\tau}(k)}\|^2 \le \eta^2_{\bar{\tau}(k)} \|u^{\bar{\tau}(k)}\|^2.$$

Lại có $\{u^k\}$ bị chặn. Tương tự như (2.11), chúng ta thu được

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\bar{\tau}(k)} \le -\frac{1}{\beta} \limsup_{k\to\infty} f(x^*, y^{\bar{\tau}(k)}) = 0,$$

dẫn tới $\lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\bar{\tau}(k)} = 0$. Kết hợp các điều kiện

$$\bar{\tau}(k) \nearrow +\infty, 0 \le \bar{a}_k \le \bar{a}_{\bar{\tau}(k)+1}, \bar{a}_{\bar{\tau}(k)} \le \bar{a}_{\bar{\tau}(k)+1}, \quad \forall k \ge k_0,$$

và Khẳng định 2.1: $\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0$, ta có

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \|x^{\bar{\tau}(k)+1} - x^{\bar{\tau}(k)}\|$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \left[\|x^{\bar{\tau}(k)+1} - y^{\bar{\tau}(k)}\| + \|y^{\bar{\tau}(k)} - x^{\bar{\tau}(k)}\| \right]$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left[\eta_{\bar{\tau}(k)} \|u^{\bar{\tau}(k)}\| + \|y^{\bar{\tau}(k)} - x^{\bar{\tau}(k)}\| \right]$$
$$= 0.$$

Bởi vậy, $\lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\tau(k)+1} = 0$. Suy ra, $\lim_{k\to\infty} \bar{a}_k = 0$. Sử dụng $\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0$, chúng ta thu được các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ mạnh tới x^*. ■

2.2 Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính

Trong mục này, chúng tôi kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với kỹ thuật quán tính để giải bài toán cân bằng hai cấp sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } \nu h(x^*, y) + \langle \rho F(x^*) - x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in \Omega, \tag{2.20}$$

trong đó, $\rho > 0$, $\nu > 0$, $\Omega := Fix(T) \cap Fix(S) \cap Sol(C, g)$ và $Sol(C, g) := \{x^* \in C : g(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C\}$, nghĩa là $Sol(C, g)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Ở đây, T, S, F là các ánh xạ từ $\mathbb{H}$ vào $\mathbb{H}$. Các tập $Fix(T), Fix(S)$ là tập điểm bất động của T và S tương ứng.

Dễ thấy, nếu đặt $f(x, y) := h(x, y) + \langle \rho F(x) - x, y - x \rangle$ thì song hàm f thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, y) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{H}$. Đồng thời bài toán (2.20) trở thành bàn toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in \Omega.$$

2.2.1 Thuật toán

Chúng tôi giả thiết đặt lên các song hàm và ánh xạ giá như sau:

(B_1) Tập nghiệm của bài toán (2.20) khác rỗng;

(B_2) Ánh xạ $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tiệm cận không giãn;

(B_3) Ánh xạ $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là $\zeta-$giả co chặt;

(B_4) Song hàm g giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số c_1, c_2. Với mỗi $x \in \mathbb{H}$, thì $g(x, \cdot)$ và $h(x, \cdot)$ là lồi và khả dưới vi phân trên toàn bộ không gian $\mathbb{H}$, đồng thời $g(\cdot, x)$ liên tục yếu trên $\mathbb{H}$;

(B_5) Ánh xạ đa trị $\partial_2 g(x,x)$ là $L-$ liên tục Lipschitz theo biến $x \in \mathbb{H}$;

(B_6) Nếu $x^k \rightharpoonup \hat{x}$ và $w^k \in \partial_2 g(x^k,x^k)$, thì tồn tại dãy con $\{w^{k_j}\}$ của $\{w^k\}$ sao cho $w^{k_j} \rightharpoonup \hat{w} \in \partial_2 g(\hat{x},\hat{x})$;

(B_7) Song hàm h là $\alpha-$đơn điệu mạnh, $\partial_2 h(x,x)$ liên tục Lipschitz với hằng số $\eta > 0$, compact với mỗi $x \in \mathbb{H}$ cố định và $\dfrac{\eta}{\alpha} < \sqrt{2}$. Đồng thời, nếu $\{v^k\} \subset \partial_2 h(x^*,x^*), v^k \rightharpoonup \hat{v}$ và $x^k \rightharpoonup \hat{x}$, thì $\langle v^k, x^k\rangle \to \langle \hat{v}, \hat{x}\rangle$, trong đó x^* là nghiệm của Bài toán (2.20);

(B_8) Ánh xạ $F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ là $\beta-$đơn điệu mạnh và $\kappa-$liên tục Lipschitz sao cho $\delta < \tau := 1-\sqrt{1-\rho(2\beta-\rho\kappa^2)}$, trong đó $\rho \in (0, \frac{2\beta}{\kappa^2})$, $\nu \in (\frac{1}{\alpha}, \frac{2\alpha}{\eta^2})$ và $\delta = \sqrt{1-\nu(2\alpha-\nu\eta^2)}$.

Chọn các dãy tham số thỏa mãn

$$\begin{cases} \{\alpha_k\} \subset (0,1), \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \\ \{\sigma_k\} \subset [0,1], \beta_k > 0, \gamma_k > 0, \delta_k > 0, \\ \sup\left\{\frac{\sigma_k}{\alpha_k} : k \geq 1\right\} < \infty, \beta_k+\gamma_k+\delta_k = 1, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\theta_k}{\alpha_k} = 0, (\gamma_k+\delta_k)\zeta \leq \gamma_k, \\ 0 < \liminf\limits_{k\to\infty} \beta_k \leq \limsup\limits_{k\to\infty} \beta_k < 1, \liminf\limits_{k\to\infty} \delta_k > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ta có các dãy số $\alpha_k = \frac{1}{20k+100}, \beta_k = 0,1 + \frac{1}{15k+50}, \gamma_k = 0,25(1-\beta_k), \delta_k = 1-\beta_k-\gamma_k, \sigma_k = \frac{1}{4k+9}$ thỏa mãn (2.21). Thuật giải cho bài toán (2.20) được mô tả như sau:

Thuật toán 2.3. *(Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính)*

Khởi tạo. Lấy $x_0, x_1 \in \mathbb{H}, \epsilon > 0$ và các tham số $\gamma \in (0,+\infty), l \in (0,1), \mu \in (0,1)$, gán $k := 0$.

Bước 1. Đặt $w^k = T^k x^k + \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1})$. Tính

$$y^k = \text{argmin}\left\{\tau_k g(w^k,y) + \frac{1}{2}\|y-w^k\|^2 : y \in C\right\},$$

với $\psi^k \in \partial_2 g(w^k,w^k)$ và $\tau_k = \gamma l^m$ được chọn là số τ bé nhất thuộc $\{\gamma, \gamma l, \gamma l^2, \cdots\}$ thỏa mãn $0 < \tau_k < \xi < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$ và điều kiện kiểu Armijo

$$\tau\left\|\psi^k - \mathrm{P}_{\partial_2 g(y^k,y^k)}(\psi^k)\right\| \leq \mu\|w^k-y^k\|. \tag{2.22}$$

Bước 2. Tính

$$u^k = \operatorname{argmin}\left\{\tau_k g(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C_k\right\},$$

trong đó

$$C_k := \left\{x \in \mathbb{H} : \langle w^k - \tau_k \widehat{w}^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\right\}$$

và $\widehat{w}^k \in \partial_2 g(w^k, y^k)$ sao cho $C \subset C_k$.

Bước 3. Tính

$$z^k = \alpha_k \xi^k + (I - \alpha_k \rho F) T^k u^k,$$

ở đây

$$\xi^k = x^k - \nu \hat{\xi}^k, \text{ và } \hat{\xi}^k \in \partial_2 h(x^k, x^k)$$

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = \beta_k x^k + \gamma_k z^k + \delta_k S z^k. \tag{2.23}$$

Bước 5. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại, gán $k := k+1$ và quay trở lại ***Bước 1.***

2.2.2 Kết quả hội tụ

Trước hết, chúng tôi có một số bổ liên quan sau đây.

Bổ đề 2.4. *Giả sử điều kiện* (B_4) *được thỏa mãn. Khi đó, vòng lặp kiểu Armijo* (2.22) *sẽ dừng, hơn nữa ta có bất đẳng thức*

$$\min\left\{\gamma, \frac{\mu l}{L}\right\} \le \tau_k \le \gamma, \ \forall k \ge 1. \tag{2.24}$$

Chứng minh. Từ $\psi^k \in \partial_2 g(w^k, w^k)$ và $\partial_2 g(x, x)$ liên tục Lipschitz với hằng số L trên $\mathbb{H}$, nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{L}\left\|\psi^k - P_{\partial_2 g(y^k, y^k)}(\psi^k)\right\| &= \frac{\mu}{L} d\left(\psi^k, \partial_2 g(y^k, y^k)\right)\\ &\le \frac{\mu}{L} d\left(\partial_2 g(w^k, w^k), \partial_2 g(y^k, y^k)\right)\\ &\le \frac{\mu}{L} d_H\left(\partial_2 g(w^k, w^k), \partial_2 g(y^k, y^k)\right)\\ &\le \mu\|w^k - y^k\|.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{\mu}{L}\left\|\psi^k - P_{\partial_2 g(y^k, y^k)}(\psi^k)\right\| \le \mu\|w^k - y^k\|. \tag{2.25}$$

Mặt khác, với mỗi số tự nhiên k không âm,

$$y^k = \text{argmin}\left\{\gamma l^k g(w^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C\right\}.$$

Kết hợp (2.22) và (2.25), ta thấy rằng nếu $\tau = \gamma l^k \leq \frac{\mu}{L}$ thì điều kiện (2.22) được thỏa mãn. Ngược lại, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma l^k = 0$ với $l \in (0, 1)$. Như vậy, τ_k hoàn toàn xác định. Dễ thấy, $\tau_k = \gamma l^m \leq \gamma$. Nếu $\tau_k = \gamma$, thì bất đẳng thức (2.24) đúng. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $\tau_k < \gamma$. Từ (2.25), τ_k là số lớn nhất thỏa mãn (2.22) và $\frac{1}{l} > 1$, do đó $\frac{\tau_k}{l} > \tau_k$ và

$$\frac{\tau_k}{l}\|\psi^k - P_{\partial_2 g(y^k,y^k)}(\psi^k)\| > \mu\|w^k - y^k\| \geq \frac{\mu}{L}\|\psi^k - P_{\partial_2 g(y^k,y^k)}(\psi^k)\|,$$

trong đó $y^k = \text{argmin}\left\{\tau_k g(w^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C\right\}$. Điều này dẫn tới $\tau_k > \frac{\mu l}{L}$. Vậy chúng ta có bất đẳng thức (2.24). ■

Bổ đề 2.5. [10, Bổ đề 3.1] *Giả sử $x^* \in Sol(C, g)$ và giả thiết (B_4) được thỏa mãn. Khi đó,*

$$\|u^k - x^*\|^2 \leq \|w^k - x^*\|^2 - (1 - 2\tau_k c_1)\|y^k - w^k\|^2 - (1 - 2\tau_k c_2)\|u^k - y^k\|^2.$$

Bổ đề 2.6. *Gọi $\{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{z^k\}$ là các dãy được tạo ra từ Thuật toán 2.3 và x^* là một điểm trong Ω. Khi đó, tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho*

$$\begin{aligned}
&\|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad \leq \alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1 - \alpha_k\tau)(1 + \theta_k)\big[\|w^k - x^*\|^2 - (1 - 2\tau_k c_1)\|y^k - w^k\|^2 \\
&\qquad\qquad - (1 - 2\tau_k c_2)\|u^k - y^k\|^2\big] + 2\alpha_k\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle, \quad \forall k \geq k_0,
\end{aligned}$$

trong đó $\xi^k = x^k - \nu\hat{\xi}^k$, $\hat{\xi}^k \in \partial_2 h(x^k, x^k)$ và $(\xi^k)^* = P_{x^* - \nu\partial_2 h(x^*,x^*)}(\xi^k)$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2, ta có

$$\|\xi^k - (\xi^k)^*\| \leq \delta\|x^k - x^*\|. \tag{2.26}$$

Mặt khác, sử dụng tính chất tiệm cận không giãn của ánh xạ T và Bổ đề 1.10 với $T := Id$ là ánh xạ đơn vị, $\mu := \rho$ và $\lambda := \alpha_k$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
\big\|(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k\rho F)T^k x^*\big\| &\leq (1 - \alpha_k\tau)\big\|T^k u^k - T^k x^*\big\| \\
&\leq (1 - \alpha_k\tau)(1 + \theta_k)\|u^k - x^*\|.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Kết hợp (2.26), (2.27) và bất đẳng thức $\|a+b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\langle b, a+b\rangle$ với mọi $a, b \in \mathbb{H}$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad = \left\|\alpha_k \xi^k + (Id - \alpha_k \rho F)T^k u^k - x^*\right\|^2 \\
&\quad = \Big\|\alpha_k(\xi^k - (\xi^k)^*) + \big[(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k \rho F)T^k x^*\big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \big[\alpha_k (\xi^k)^* + (Id - \alpha_k \rho F)T^k x^* - x^*\big]\Big\|^2 \\
&\quad = \Big\|\alpha_k(\xi^k - (\xi^k)^*) + \big[(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k \rho F)T^k x^*\big] + \alpha_k\big[(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\big]\Big\|^2 \\
&\quad \leq \Big\|\alpha_k(\xi^k - (\xi^k)^*) + \big[(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k \rho F)T^k x^*\big]\Big\|^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\alpha_k\langle (\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\quad \leq \Big[\alpha_k\|\xi^k - (\xi^k)^*\| + \big\|(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k \rho F)T^k x^*\big\|\Big]^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\alpha_k\langle (\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\quad \leq \Big[\alpha_k\delta\|x^k - x^*\| + (1 - \alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|u^k - x^*\|\Big]^2 + 2\alpha_k\langle (\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Theo điều kiện (2.21), suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta_k(2+\theta_k)}{\alpha_k(1-\beta_k)} = 0,$$

và do đó, tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho

$$\frac{\theta_k(2+\theta_k)}{\alpha_k(1-\beta_k)} < \frac{\tau - \delta}{2}, \ \forall k \geq k_0.$$

Dẫn đến

$$
\begin{aligned}
\alpha_k\delta + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k) &= 1 - \alpha_k(\tau-\delta) + (1-\alpha_k\tau)\theta_k \\
&\leq 1 - \alpha_k(\tau - \delta) + \theta_k \\
&\leq 1 - \frac{\alpha_k(\tau-\delta)}{2}.
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Từ (2.28) và (2.29), ta có

$$
\begin{aligned}
&\|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad \leq \Big[\alpha_k\delta\|x^k - x^*\| + (1 - \alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|u^k - x^*\|\Big]^2 + 2\alpha_k\langle (\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\quad \leq \alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1 - \alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|u^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\langle (\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle
\end{aligned}
$$

$$\leq \alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\Big[\|w^k - x^*\|^2 - (1-2\tau_k c_1)\|y^k - w^k\|^2 - (1-2\tau_k c_2)\|u^k - y^k\|^2\Big] + 2\alpha_k\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle.$$

■

Bổ đề 2.7. *Nếu* $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$*, thì các dãy* $\{x^k\}, \{u^k\}, \{z^k\}, \{w^k\}, \{y^k\}, \{\xi^k\}, \{Sz^k\}, \{T^k u^k\}$ *và* $\{T^k x^k\}$ *bị chặn.*

Chứng minh. Với mỗi $x^* \in \Omega$, sử dụng Bổ đề 2.5, $Tx^* = x^*$ và giả thiết (B_2), suy ra

$$\begin{aligned}
\|u^k - x^*\| &\leq \|w^k - x^*\| \\
&= \big\|T^k x^k + \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1}) - x^*\big\| \\
&\leq \big\|T^k x^k - x^*\big\| + \sigma_k\big\|T^k x^k - T^k x^{k-1}\big\| \\
&= \big\|T^k x^k - T^k x^*\big\| + \sigma_k\big\|T^k x^k - T^k x^{k-1}\big\| \\
&\leq (1+\theta_k)\Big(\|x^k - x^*\| + \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\Big) \qquad (2.30)\\
&= (1+\theta_k)\Big(\|x^k - x^*\| + \alpha_k\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k - x^{k-1}\|\Big).
\end{aligned}$$

Kết hợp với $\sup\left\{\frac{\sigma_k}{\alpha_k} : k \geq 1\right\} < \infty$ và $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$, suy ra tồn tại hằng số $M_1 > 0$ sao cho

$$\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k - x^{k-1}\| \leq M_1, \ \forall k \geq 1.$$

Do đó,

$$\|u^k - x^*\| \leq \|w^k - x^*\| \leq (1+\theta_k)(\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1), \ \forall k \geq 1. \qquad (2.31)$$

Từ Thuật toán 2.3, (2.26), Bổ đề 1.10, (2.31) và $(\xi^k)^* = P_{x^* - \nu\partial_2 h(x^*, x^*)}(\xi^k)$, suy ra, với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\|z^k - x^*\| \\
&\quad = \big\|\alpha_k\xi^k + (Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - x^*\big\| \\
&\qquad + \Big\|\alpha_k(\xi^k - (\xi^k)^*) + \big[(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k\rho F)T^k x^*\big] + \alpha_k\big[(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\big]\Big\| \\
&\quad \leq \alpha_k\|\xi^k - (\xi^k)^*\| + \big\|(Id - \alpha_k\rho F)T^k u^k - (Id - \alpha_k\rho F)T^k x^*\big\| + \alpha_k\big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\big\| \\
&\quad \leq \alpha_k\delta\|x^k - x^*\| + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|u^k - x^*\| + \alpha_k\big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\big\| \\
&\quad \leq \alpha_k\delta\|x^k - x^*\| + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)(1+\theta_k)\Big(\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1\Big) \\
&\qquad + \alpha_k\big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\big\|
\end{aligned}$$

$$\leq \Big[\alpha_k\delta + 1 - \alpha_k\tau + \theta_k(2+\theta_k)\Big]\Big(\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1\Big) + \alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|. \tag{2.32}$$

Do $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\theta_k(2+\theta_k)}{\alpha_k(1-\beta_k)} = 0$, dẫn tới, tồn tại số nguyên dương $k_0 > 0$ sao cho

$$\theta_k(2+\theta_k) < \frac{1}{2}(\tau-\delta)\alpha_k(1-\beta_k), \ \forall k \geq k_0.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên và (2.32), ta có

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\| &\leq \left(1 - \frac{\alpha_k(\tau-\delta)}{2}\right)\Big(\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1\Big) + \alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\| \\
&\leq \left(1 - \frac{\alpha_k(\tau-\delta)}{2}\right)\|x^k - x^*\| + \alpha_k\Big(M_1 + \Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|\Big), \ \forall k \geq k_0.
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 1.12 cùng cùng với điều kiện $(\gamma_k + \delta_k)\zeta \leq \gamma_k$, dẫn tới, với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - x^*\| \\
&\quad = \Big\|\beta_k(x^k - x^*) + \gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - x^*)\Big\| \\
&\quad \leq \beta_k\|x^k - x^*\| + \Big\|\gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - Sx^*)\Big\| \\
&\quad \leq \beta_k\|x^k - x^*\| + (\gamma_k + \delta_k)\Big\|z^k - x^*\Big\| \\
&\quad = \beta_k\|x^k - x^*\| + (1-\beta_k)\Big\|z^k - x^*\Big\| \\
&\quad \leq \left[1 - \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right]\|x^k - x^*\| + \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}.\frac{2\big(M_1 + \|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\|\big)}{\tau-\delta} \\
&\quad \leq \max\left\{\|x^k - x^*\|, \frac{2\big(M_1 + \|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\|\big)}{\tau-\delta}\right\}.
\end{aligned}$$

Từ $(\xi^k)^* = P_{x^* - \nu\partial_2 h(x^*,x^*)}(\xi^k)$ và tính compact của $\partial_2 h(x^*, x^*)$, suy ra, chúng ta có thể giả sử rằng tồn tại $\mathcal{M} > 0$ sao cho

$$\frac{2\big(M_1 + \|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\|\big)}{\tau-\delta} < \mathcal{M}, \ \forall k \geq k_0.$$

Suy ra,

$$\|x^k - x^*\| \leq \max\left\{\|x_{k_0} - x^*\|, \mathcal{M}\right\}, \ \forall k \geq k_0.$$

Như vậy, dãy $\{x^k\}$ bị chặn, dẫn đến các dãy $\{u^k\}, \{w^k\}, \{y^k\}, \{\xi^k\}$, $\{Sz^k\}, \{T^k u^k\}$ và $\{T^k x^k\}$ cũng bị chặn. ■

Bổ đề 2.8. *Cho các dãy $\{w^k\}, \{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{z^k\}$ được sinh ra từ Thuật toán 2.3. Nếu $\|T^k x^k - T^{k+1}x^k\| \to 0, \|x^k - x^{k+1}\| \to 0, \|w^k - x^k\| \to 0, \|w^k - z^k\| \to 0$ và $\exists\{w^{k_j}\} \subset \{w^k\}$ sao cho $w^{k_j} \rightharpoonup z \in \mathbb{H}$, thì $z \in \Omega$.*

Chứng minh. Từ Thuật toán 2.3, ta có

$$\|T^k x^k - x^k\| \le \|w^k - x^k\| + (1+\theta_k)\|x^k - x^{k-1}\|.$$

Sử dụng các giả thiết $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0$, $\|w^k - x^k\| \to 0$, chúng ta thu được

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - T^k x^k\| = 0. \tag{2.33}$$

Kết hợp các giả thiết $\|w^k - x^k\| \to 0$ và $\|w^k - z^k\| \to 0$ suy ra

$$\|z^k - x^k\| \le \|w^k - z^k\| + \|w^k - x^k\| \to 0 \text{ (khi } k \to \infty).$$

Để ý rằng, với mỗi $x^* \in \Omega$, ta có

$$\begin{aligned}
\|w^k - x^*\|^2 &= \Big\|T^k x^k - x^* + \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1})\Big\|^2 \\
&\le \Big(\|T^k x^k - T^k x^*\| + \sigma_k\|T^k x^k - T^k x^{k-1}\|\Big)^2 \\
&\le \Big((1+\theta_k)\|x^k - x^*\| + \sigma_k(1+\theta_k)\|x^k - x^{k-1}\|\Big)^2 \\
&= \|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k + \theta_k(2+\theta_k)\Big(\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k\Big),
\end{aligned}$$

trong đó $\Xi_k := \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\Big(2\|x^k - x^*\| + \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\Big)$.
Sử dụng Bổ đề 2.6 và (2.29), khi đó với mọi $k \ge k_0$, ta có

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\Big[(1-2\tau_k c_1)\|y^k - w^k\|^2 + (1-2\tau_k c_2)\|u^k - y^k\|^2\Big] \\
&\quad\le (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k - x^*\|^2 + \alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2 \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_k\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\quad\le (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\Big[\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k + \theta_k(2+\theta_k)\big(\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k\big)\Big] \\
&\qquad\qquad + \alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|.\|z^k - x^*\| \\
&\quad= \Big[(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k) + \alpha_k\delta\Big]\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\Big[\Xi_k + \\
&\qquad + \theta_k(2+\theta_k)\big(\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k\big)\Big] - \|z^k - x^*\|^2 + 2\alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|.\|z^k - x^*\| \\
&\quad\le \|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\Big[\Xi_k + \theta_k(2+\theta_k)\big(\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k\big)\Big] \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|.\|z^k - x^*\| \\
&\quad\le \|x^k - z^k\|\big(\|x^k - x^*\| + \|z^k - x^*\|\big) + (1+\theta_k)\Big[\Xi_k + \theta_k(2+\theta_k)\big(\|x^k - x^*\|^2 + \Xi_k\big)\Big] \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_k\Big\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\Big\|.\|z^k - x^*\|.
\end{aligned}$$

Từ $\alpha_k \to 0, \theta_k \to 0, \|x^k - x^{k-1}\| \to 0$, Bổ đề 2.7 (tính bị chặn của $\{x^k\}, \{z^k\}$), $\|x^k - z^k\| \to 0$ và $0 < \tau_k < \xi < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$, chúng ta thấy rằng

$$\lim_{k\to\infty} \Xi_k = 0, \lim_{k\to\infty} \|w^k - y^k\| = 0 \text{ v } \lim_{k\to\infty} \|u^k - y^k\| = 0.$$

Suy ra,

$$\|w^k - u^k\| \le \|w^k - y^k\| + \|y^k - u^k\| \to 0 \text{ và } \|x^k - u^k\| \le \|x^k - w^k\| + \|w^k - u^k\| \to 0.$$

Theo định nghĩa x^{k+1}, ta có

$$\delta_k\|Sz^k - z^k\| = \|x^{k+1} - x^k + (1-\beta_k)(x^k - z^k)\| \le \|x^{k+1} - x^k\| + \|x^k - z^k\|.$$

Mà $\|x^k - x^{k+1}\| \to 0, \|z^k - x^k\| \to 0$ và $\liminf_{k\to\infty} \delta_k > 0$, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k - Sz^k\| = 0. \tag{2.34}$$

Từ $y^k = \operatorname{argmin}\left\{\tau_k g(w^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C\right\}$, áp dụng Bổ đề 1.4, dẫn đến

$$0 \in \tau_k \partial_2 g(w^k, y^k) + y^k - w^k + N_C(y^k),$$

hay

$$\langle \tau_k \widehat{w}^k + y^k - w^k, x - y^k\rangle \ge 0, \ \forall x \in C.$$

Theo định nghĩa C_k, ta có $C \subset C_k$. Do đó,

$$\frac{1}{\tau_k}\langle w^k - y^k, x - y^k\rangle \le \langle \widehat{w}^k, x - y^k\rangle, \ \forall x \in C. \tag{2.35}$$

Sử dụng Bổ đề 2.4, $w^k - y^k \to 0$ và (2.35), chúng ta có $\tau_k \ge \min\left\{\gamma, \frac{\mu l}{L}\right\}$ và

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\tau_k}\langle w^k - y^k, x - y^k\rangle = 0 \Rightarrow \liminf_{k\to\infty}\langle \widehat{w}^k, x - y^k\rangle \ge 0, \ \forall x \in C. \tag{2.36}$$

Mặt khác, từ $\widehat{w}^k \in \partial_2 g(w^k, y^k)$ suy ra

$$g(w^k, x) - g(w^k, y^k) \ge \langle \widehat{w}^k, x - y^k\rangle, \ \forall x \in C. \tag{2.37}$$

Sử dụng định nghĩa của $p^{k_j} \in \partial_2 g(w^{k_j}, w^{k_j})$, ta có

$$g(w^{k_j}, y^{k_j}) = g(w^{k_j}, y^{k_j}) - g(w^{k_j}, w^{k_j}) \ge \langle p^{k_j}, y^{k_j} - w^{k_j}\rangle,$$

trong đó $\{w^{k_j}\}$ thỏa mãn $w^{k_j} \rightharpoonup z \in \mathbb{H}$. Từ giả thiết (B_6), suy ra tồn tại dãy con $\{p^{k_{j_h}}\}$ sao cho $p^{k_{j_h}} \rightharpoonup \bar{p} \in \partial_2 g(z, z)$. Áp dụng định lý Banach - Steinhaus, ta có $\{p^{k_{j_h}}\}$ bị chặn. Kết hợp điều này với $\lim_{k\to\infty} \|y^k - w^k\| = 0$, chúng ta thu được

$$\liminf_{h\to\infty} g(w^{k_{j_h}}, y^{k_{j_h}}) \ge \liminf_{h\to\infty}\langle p^{k_{j_h}}, y^{k_{j_h}} - w^{k_{j_h}}\rangle = 0, \tag{2.38}$$

Từ (2.36), (2.37) và (2.38), ta có

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to\infty} g(w^{k_{j_h}}, x) &\geq \liminf_{h\to\infty} \left[g(w^{k_{j_h}}, y^{k_{j_h}}) + \langle \widehat{w}^{k_{j_h}}, x - y^{k_{j_h}}\rangle\right] \\ &\geq \liminf_{h\to\infty} g(w^{k_{j_h}}, y^{k_{j_h}}) + \liminf_{h\to\infty} \langle \widehat{w}^{k_{j_h}}, x - y^{k_{j_h}}\rangle \\ &\geq \liminf_{h\to\infty} g(w^{k_{j_h}}, y^{k_{j_h}}) + \liminf_{k\to\infty} \langle \widehat{w}^{k}, x - y^{k}\rangle \\ &\geq 0,\ \forall x \in C,\end{aligned}$$

và do đó

$$\liminf_{h\to\infty} g(w^{k_{j_h}}, x) \geq 0.$$

Áp dụng giả thiết liên tục yếu trong (B_4) của $g(\cdot, x)$ và $w^{k_{j_h}} \rightharpoonup z$, chúng ta có $g(z, x) \geq 0$ với mọi $x \in C$. Mặt khác, từ $w^{k_j} \rightharpoonup z$ và $w^k - y^k \to 0$, suy ra $y^{k_j} \rightharpoonup z$. Từ $\{y^{k_j}\} \subset C$ và C đóng, chúng ta có $z \in C$ và do đó $z \in Sol(C, g)$. Từ tính tiệm cận không giãn của T, suy ra

$$\begin{aligned}\|Tx^k - x^k\| &\leq \|Tx^k - T^{k+1}x^k\| + \|T^{k+1}x^k - T^k x^k\| + \|T^k x^k - x^k\| \\ &\leq (2 + \theta_1)\|x^k - T^k x^k\| + \|T^{k+1}x^k - T^k x^k\|.\end{aligned}$$

Từ (2.33) và giả thiết $\|T^{k+1}x^k - T^k x^k\| \to 0$, kéo theo

$$\lim_{k\to\infty} \|Tx^k - x^k\| = 0.$$

Tiếp theo, áp dụng Bổ đề 1.11 cho dãy $\{x^{k_j}\}$ chúng ta thu được $x^{k_j} \rightharpoonup z$ và $(I - T)z = 0$. Như vậy, $z \in \mathrm{Fix}(T)$. Giả thiết $w^k - z^k \to 0$ và $w^{k_j} \rightharpoonup z$ dẫn đến $z^{k_j} \rightharpoonup z$. Kết hợp (2.34), $z^{k_j} - Sz^{k_j} \to 0$ và Bổ đề 1.9, ta thấy $(I - S)z = 0$ và do đó $z \in \mathrm{Fix}(S)$. Bởi vậy,

$$z \in \mathrm{Fix}(T) \cap \mathrm{Fix}(S) \cap \mathrm{Sol}(g, C) = \Omega.$$

■

Định lý 2.3. *Nếu* $T^k x^k - T^{k+1}x^k \to 0$, *thì*

$$x^k \to x^* \text{ khi và chỉ khi} \begin{cases} x^k - x^{k+1} \to 0 \\ x^k - y^k \to 0, \end{cases}$$

trong đó, $x^* \in \Omega$ *là một nghiệm của bài toán* (2.20).

Chứng minh. Với mỗi $x, y \in \mathbb{H}$, áp dụng bất đẳng thức tam giác của khoảng cách Hausdorff, tính co của ánh xạ đa trị $p(x) := x - \nu\partial_2 h(x,x)$ (Bổ đề 2.2) và áp dụng Bổ đề 1.10 cho $T := I, \lambda := 1, \mu := \rho$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&d_H\Big(p(x) + x - \rho F(x), p(y) + y - \rho F(y)\Big)\\
&\quad\le d_H\Big(p(x) + x - \rho F(x), p(y) + x - \rho F(x)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad + d_H\Big(p(y) + y - \rho F(y), p(y) + x - \rho F(x)\Big)\\
&\quad\le d_H\Big(p(x), p(y)\Big) + \Big\|\big(y - \rho F(y)\big) - \big(x - \rho F(x)\big)\Big\|\\
&\quad= d_H\Big(p(x), p(y)\Big) + \Big\|(Id - \rho F)(y) - (Id - \rho F)(x)\Big\|\\
&\quad\le \delta\|x - y\| + \sqrt{1 - \rho(2\beta - \rho\kappa^2)}\|x - y\|\\
&\quad= \Big(\delta + \sqrt{1 - \rho(2\beta - \rho\kappa^2)}\Big)\|x - y\|,
\end{aligned}$$

trong đó $\delta := \sqrt{1 - \nu(2\alpha - \nu\eta^2)}$ và $\nu \in (0, \frac{2\alpha}{\eta^2})$. Dưới các giả thiết (B_8), ta có $\delta + \sqrt{1 - \rho(2\beta - \rho\kappa^2)} < 1$. Nghĩa là ánh xạ $(p + Id - \rho F)$ co với hằng số $(\delta + \sqrt{1 - \rho(2\beta - \rho\kappa^2)})$. Dễ thấy rằng ánh xạ $P_\Omega(p + Id - \rho F)$ cũng co. Theo định lý điểm bất động của Nadler [19, Theorem 8.21], ánh xạ $P_\Omega(p + Id - \rho F)$ có một điểm bất động. Giả sử điểm bất động đó là $x^* \in \mathbb{H}$. Suy ra tồn tại $w^* \in \partial_2 h(x^*, x^*)$ sao cho $\xi^* = x^* - \nu w^* \in p(x^*)$. Khi đó, $x^* = P_\Omega\big[\xi^* + x^* - \rho F(x^*)\big]$. Nghĩa là

$$\begin{aligned}
\big\langle \rho F(x^*) - x^* + \nu w^*, y - x^*\big\rangle &= \big\langle \rho F(x^*) - \xi^*, y - x^*\big\rangle\\
&\ge 0, \ \forall y \in \Omega. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Từ $w^* \in \partial_2 h(x^*, x^*)$, suy ra

$$\nu h(x^*, y) = \nu\big[h(x^*, y) - h(x^*, x^*)\big] \ge \langle \nu w^*, y - x^*\rangle, \ \forall y \in \Omega.$$

Cộng bất đẳng thức trên với (2.39), ta có

$$\nu h(x^*, y) + \big\langle \rho F(x^*) - x^*, y - x^*\big\rangle \ge 0, \ \forall y \in \Omega.$$

Như vậy, tồn tại $x^* \in \Omega$ là nghiệm của bài toán (2.20).
Bây giờ, ta giả sử $x^k \to x^* \in \Omega$. Khi đó, $x^* = Tx^*, x^* = Sx^*$ và $x^* \in Sol(C, g)$. Sử dụng tính chất không giãn của ánh xạ T, ta có

$$\begin{aligned}
\|w^k - x^*\| &= \big\|T^k x^k - T^k x^* + \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1})\big\|\\
&\le \|T^k x^k - T^k x^*\| + \sigma_k\|T^k x^k - T^k x^{k-1}\|
\end{aligned}$$

$$\leq (1+\theta_k)\big(\|x^k - x^*\| + \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\big) \to 0 \text{ (khi } k \to \infty).$$

Từ Bổ đề 2.5, ta có

$$\|u^k - x^*\|^2 \leq \|w^k - x^*\|^2 - (1 - 2\tau_k c_1)\|y^k - w^k\|^2 - (1 - 2\tau_k c_2)\|u^k - y^k\|^2,$$

và $0 < \tau_k < \xi < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - x^*\| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|y^k - w^k\| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|u^k - y^k\| = 0.$$

Do đó,

$$0 \leq \|x^k - y^k\| \leq \|x^k - x^*\| + \|x^* - w^k\| + \|w^k - y^k\| \to 0.$$

Như vậy, ta có

$$\|x^k - x^{k+1}\| \leq \|x^k - x^*\| + \|x^{k+1} - x^*\| \to 0 \ (k \to \infty).$$

Chiều thuận của định lý được chứng minh.

Để chứng minh chiều ngược lại, chúng ta cần chứng minh các khẳng định sau đây:

Khẳng định 2.4. Tồn tại hằng số $\mathcal{M}_1 > 0$ sao cho, với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\begin{aligned}&(1-\alpha_k\tau)(1-\beta_k)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k - y^k\|^2 + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2]\\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k\mathcal{M}_1.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Thật vậy, từ tính lồi của $\|\cdot\|^2$ và $\beta_k + \gamma_k + \delta_k = 1$, suy ra

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\beta_k x^k - \beta_k x^* + \gamma_k z^k - \gamma_k x^* + \delta_k S z^k - \delta_k x^*\|^2\\ &= \left\|\beta_k(x^k - x^*) + (1-\beta_k)\frac{1}{1-\beta_k}[\gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - x^*)]\right\|^2\\ &\leq \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\left\|\frac{1}{1-\beta_k}[\gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - Sx^*)]\right\|^2\\ &= \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + \frac{1}{1-\beta_k}\left\|\gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - Sx^*)\right\|^2.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Kết hợp (2.41) và Bổ đề 1.12 với giả thiết $(\gamma_k + \delta_k)\zeta \leq \gamma_k$, dẫn đến

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + \frac{1}{1-\beta_k}\left\|\gamma_k(z^k - x^*) + \delta_k(Sz^k - Sx^*)\right\|^2\\ &\leq \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\left\|z^k - x^*\right\|^2.\end{aligned}$$

Từ Bổ đề 2.6, ta thấy rằng tồn tại số tự nhiên $k_0 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\le \beta_k \|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\left\|z^k - x^*\right\|^2 \\ &\le \beta_k \|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k - x^*\|^2 \\ &\qquad - (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k - y^k\|^2 + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2] \\ &\qquad + 2\alpha_k\langle \xi(^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle\Big\}, \ \forall k \ge k_0, \qquad (2.42)\end{aligned}$$

Từ tính bị chặn của $\{(\xi^k)^*\}$ trong Bổ đề 2.6, $\{z^k\}$ trong Bổ đề 2.7, suy ra tồn tại số dương M_2 sao cho

$$\sup_{k\ge k_0} 2\left[\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\|\|z^k - x^*\|\right] = M_2 < +\infty.$$

Kết hợp (2.42) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, với mọi $k \ge k_0$, ta có

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\ &\le \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k - x^*\|^2 \\ &\qquad - (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k - y^k\|^2 + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2] \\ &\qquad + 2\alpha_k\|(\xi^k)^* - \rho F(x^*)\|\|z^k - x^*\|\Big\} \\ &\le \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k - x^*\|^2 \\ &\qquad - (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k - y^k\|^2 \\ &\qquad + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2] + \alpha_k M_2\Big\}. \qquad (2.43)\end{aligned}$$

Mặt khác, (2.31) suy ra, với mọi $k \ge 1$, ta có

$$\begin{aligned}&\|w^k - x^*\|^2 \qquad (2.44) \\ &\le (1+\theta_k)^2(\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1)^2 \\ &= [1+\theta_k(2+\theta_k)]\left[\|x^k - x^*\|^2 + \alpha_k(2M_1\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1^2)\right] \\ &= \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_k\left\{\frac{\theta_k}{\alpha_k}(2+\theta_k)\|x^k - x^*\|^2 + (1+\theta_k)^2\left(2M_1\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

Do tính bị chặn của $\{x^k\}$ trong Bổ đề 2.7 và $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\theta_k}{\alpha_k} = 0$, dẫn đến tồn tại số thực $M_3 > 0$ sao cho

$$\sup_{k\ge 1}\left\{\frac{\theta_k}{\alpha_k}(2+\theta_k)\|x^k - x^*\|^2 + (1+\theta_k)^2(2M_1\|x^k - x^*\| + \alpha_k M_1^2)\right\} = M_3 < +\infty,$$

và do đó

$$\|w^k - x^*\|^2 \le \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_k M_3. \qquad (2.45)$$

Kết hợp (2.43) và (2.45), để ý rằng $\alpha_k\delta+(1-\alpha_k\tau_k)(1+\theta_k)\le 1-\frac{\alpha_k(\tau-\delta)}{2}\le 1$ trong (2.29), chúng ta suy ra

$$
\begin{aligned}
&\|x^{k+1}-x^*\|^2\\
&\quad\le \beta_k\|x^k-x^*\|^2+(1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k-x^*\|^2+(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k-x^*\|^2\\
&\qquad\qquad -(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k-y^k\|^2+(1-2c_1\tau_k)\|u^k-y^k\|^2]+\alpha_kM_2\Big\}\\
&\le \beta_k\|x^k-x^*\|^2+(1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k-x^*\|^2+(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)(\|x^k-x^*\|^2+\alpha_kM_3)\\
&\qquad\qquad -(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau^k)\|w^k-y^k\|^2+(1-2c_1\tau_k)\|u^k-y^k\|^2]+\alpha_kM_2\Big\}\\
&= \beta_k\|x^k-x^*\|^2+(1-\beta_k)\Big\{[\alpha_k\delta+(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)]\|x^k-x^*\|^2+(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\alpha_kM_3\\
&\qquad\qquad -(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau^k)\|w^k-y^k\|^2+(1-2c_1\tau_k)\|u^k-y^k\|^2]+\alpha_kM_2\Big\}\\
&\le \beta_k\|x^k-x^*\|^2+(1-\beta_k)\left[\|x^k-x^*\|^2+\alpha_kM_3+\alpha_kM_2\right]\\
&\qquad\qquad -(1-\beta_k)(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\left[(1-2c_2\tau_k)\|w^k-y^k\|^2+(1-2c_1\tau_k)\|u^k-y^k\|^2\right]\\
&= \|x^k-x^*\|^2+(1-\beta_k)\alpha_k(M_3+M_2)-(1-\beta_k)(1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\big[(1-2c_2\tau_k)\|w^k-y^k\|^2\\
&\qquad\qquad\qquad +(1-2c_1\tau_k)\|u^k-y^k\|^2\big].
\end{aligned}
$$

Đặt $\mathcal{M}_1:=M_2+M_3$ và sử dụng $\beta_k\in(0,1)$, Chúng ta suy ra kết luận (2.40).

Khẳng định 2.5. Tồn tại số thực dương $\mathcal{M}_0$ sao cho

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1}-x^*\|^2\le&\left[1-\frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right]\|x^k-x^*\|^2\\
&+\frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\Big[\frac{4}{\tau-\delta}\langle(\xi^k)^*-\rho F(x^*),z^k-x^*\rangle\\
&+\frac{4\mathcal{M}_0}{\tau-\delta}\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k-x^{k-1}\|+\frac{4\mathcal{M}_0^2}{\tau-\delta}\frac{\theta_k}{\alpha_k}\Big],\ \forall k\ge k_0.
\end{aligned}
$$

Thật vậy, từ (2.30), ta có $\|w^k-x^*\|\le(1+\theta_k)(\|x^k-x^*\|+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|)$. Suy ra,

$$
\begin{aligned}
\|w^k-x^*\|^2&\le(1+\theta_k)^2(\|x^k-x^*\|+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|)^2\\
&=\|x^k-x^*\|^2+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|(2\|x^k-x^*\|+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|)\\
&\quad+\theta_k(2+\theta_k)(\|x^k-x^*\|+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|)^2,\ \forall k\ge1. \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Do tính bị chặn của các dãy $\{\theta_k\}$ and $\{x^k\}$, nên $\forall k\ge 1$, tồn tại số dương $\mathcal{M}_0$ sao cho

$$\sup_{k\ge1}(2+\theta_k)(\|x^k-x^*\|+\sigma_k\|x^k-x^{k-1}\|)=\mathcal{M}_0<+\infty.$$

Từ (2.46) suy ra

$$\|w^k - x^*\|^2 \le \|x^k - x^*\|^2 + \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\mathcal{M}_0 + \theta_k\mathcal{M}_0^2. \tag{2.47}$$

Với mỗi $k \ge k_0$, kết hợp (2.42) và (2.47) dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\quad\le \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\Big\{\alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\|w^k - x^*\|^2 \\
&\qquad\quad - (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau^k)\|w^k - y^k\|^2 + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2] \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_k\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle\Big\} \\
&\quad\le \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\big\{\alpha_k\delta\|x^k - x^*\|^2 + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)\big[\|x^k - x^*\|^2 \\
&\qquad\quad + \sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\mathcal{M}_0 + \theta_k\mathcal{M}_0^2\big] + 2\alpha_k\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle\big\} \\
&\quad\le \beta_k\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)[\alpha_k\delta + (1-\alpha_k\tau)(1+\theta_k)]\|x^k - x^*\|^2 \\
&\qquad + (1-\beta_k)[\sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|\mathcal{M}_0 + \theta_k\mathcal{M}_0^2] + 2\alpha_k(1-\beta_k)\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle.
\end{aligned}$$

Khi đó, theo (2.29), chúng ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\quad\le \left[1 - \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right]\|x^k - x^*\|^2 + (1-\beta_k)\big(\sigma_k\|x^k - x^{k-1}\|2\mathcal{M}_0 + 2\theta_k\mathcal{M}_0^2\big) \\
&\qquad + 2\alpha_k(1-\beta_k)\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\quad= \left[1 - \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right]\|x^k - x^*\|^2 \\
&\qquad + \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\Big[\frac{4}{\tau-\delta}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \\
&\qquad\quad + \frac{4\mathcal{M}_0}{\tau-\delta}\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k - x^{k-1}\| + \frac{4\mathcal{M}_0^2}{\tau-\delta}\frac{\theta_k}{\alpha_k}\Big].
\end{aligned}$$

Khẳng định 2.5 được chứng minh.

Khẳng định 2.6. Dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm x^* của bài toán (2.20).

Thật vậy, do Khẳng định 2.5, nên tồn tại số thực dương $\mathcal{M}_0$ và số nguyên $k_0 > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\le \left[1 - \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right]\|x^k - x^*\|^2 \\
&\quad + \frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\Big[\frac{4}{\tau-\delta}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle
\end{aligned}$$

$$+\frac{4\mathcal{M}_0}{\tau-\delta}\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k - x^{k-1}\| + \frac{4\mathcal{M}_0^2}{\tau-\delta}\frac{\theta_k}{\alpha_k}\Big],\ \forall k \geq k_0.$$

Theo Bổ 1.8, ta cần chỉ ra rằng $\limsup_{k\to\infty}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle \leq 0$. Sử dụng Khẳng định 2.4, $x^k - x^{k+1} \to 0, \alpha_k \to 0, \theta_k \to 0$ và $0 < \limsup_{k\to\infty}\beta_k < 1$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}(1-\alpha_k\tau)(1-\beta_k)(1+\theta_k)[(1-2c_2\tau_k)\|w^k - y^k\|^2 + (1-2c_1\tau_k)\|u^k - y^k\|^2]\\
&\quad\leq \limsup_{k\to\infty}\left(\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k\mathcal{M}_1\right)\\
&\quad= \limsup_{k\to\infty}[(\|x^k - x^*\| + \|x^{k+1} - x^*\|)(\|x^k - x^*\| - \|x^{k+1} - x^*\|) + \alpha_k\mathcal{M}_1]\\
&\quad\leq \limsup_{k\to\infty}(\|x^k - x^*\| + \|x^{k+1} - x^*\|)\|x^k - x^{k+1}\|\\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Trong đó bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ Bổ đề 2.7. Do đó,

$$\lim_{k\to\infty}\|w^k - y^k\| = 0,\ \lim_{k\to\infty}\|u^k - y^k\| = 0. \tag{2.48}$$

Dễ thấy, giả thiết $\|x^k - y^k\| \to 0$ cùng với (2.48), suy ra

$$0 \leq \|w^k - x^k\| \leq \|w^k - y^k\| + \|y^k - x^k\| \to 0.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|T^k x^k - x^k\| &= \|w^k - x^k - \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1})\|\\
&\leq \|w^k - x^k\| + \sigma_k(1+\theta_k)\|x^k - x^{k-1}\| \to 0.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Từ $z^k = \alpha_k\xi^k + (I - \alpha_k\rho F)T^k u^k$, (2.48), (2.49) và tính bị chặn của $\{x^k\}, \{T^k x^k\}, \{\xi^k\}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&\|z^k - x^k\|\\
&\quad= \left\|\alpha_k\xi^k - \alpha_k\rho F(T^k u^k) + T^k u^k - x^k\right\|\\
&\quad\leq \alpha_k[\|\xi^k\| + \rho\|F(T^k u^k)\|] + \|T^k u^k - x^k\|\\
&\quad= \alpha_k[\|\xi^k\| + \|\rho F(T^k u^k)\|] + \|T^k u^k - T^k y^k + T^k y^k - T^k x^k + T^k x^k - x^k\|\\
&\quad\leq \alpha_k[\|\xi^k\| + \|\rho F(T^k u^k)\|] + (1+\theta_k)(\|u^k - y^k\| + \|y^k - x^k\| + \|T^k x^k - x^k\|)\\
&\quad\to 0.
\end{aligned}$$

Điều này kéo theo $\|w^k - z^k\| \le \|w^k - x^k\| + \|x^k - z^k\| \to 0$. Bởi tính bị chặn của $\{z^k\}$, do vậy, tồn tại dãy con $\{z^{k_j}\}$ của $\{z^k\}$ sao cho $z^{k_j} \rightharpoonup z^*$ và

$$\limsup_{k\to\infty}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle(\xi^{k_j})^* - \rho F(x^*), z^{k_j} - x^*\rangle, \tag{2.50}$$

trong đó $(\xi^k)^* = P_{x^*-\nu\partial_2 h(x^*,x^*)}(\xi^k)$. Sử dụng $z^k - x^k \to 0$ và $w^k - z^k \to 0$, chúng ta cũng có

$$w^{k_j} \rightharpoonup z^*, \quad x^{k_j} \rightharpoonup z^*.$$

Áp dụng Bổ đề (2.8), ta có $x^* \in \Omega$.

Lại có dãy $\xi^k \in x^k - \nu\partial_2 h(x^k, x^k)$ chứa dãy $\xi^{k_j} \rightharpoonup \hat{\xi}_* \in z^* - \nu\partial_2 h(z^*, z^*)$ và dãy $(\xi^k)^* = P_{x^*-\nu\partial_2 h(x^*,x^*)}(\xi^k)$ chứa $(\xi^{k_j})^* \rightharpoonup \overline{\xi}_* = P_{x^*-\nu\partial_2 h(x^*,x^*)}(\hat{\xi}^*)$. Nên ta có

$$\limsup_{k\to\infty}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle = \langle\overline{\xi}_* - \rho F(x^*), z^* - x^*\rangle, \tag{2.51}$$

Chọn $\xi^* \in x^* - \nu\partial_2 h(x^*, x^*)$, trong đó $x^* = P_\Omega[\xi^* + x^* - \rho F(x^*)]$. Khi đó

$$\langle\overline{\xi}_* - \rho F(x^*), z^* - x^*\rangle = \langle\overline{\xi}_* - \xi^*, z^* - x^*\rangle + \langle\xi_* - \rho F(x^*), z^* - x^*\rangle. \tag{2.52}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned}\overline{\xi}_* &= z^* - \nu\overline{w}^*, \quad \overline{w}^* \in \partial_2 h(z^*, z^*);\\ \xi^* &= x^* - \nu w^*, \quad w^* \in \partial_2 h(x^*, x^*).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\langle\overline{\xi}_* - \xi^*, z^* - x^*\rangle &= \langle z^* - \nu\overline{w}^* - x^* + \nu w^*, z^* - x^*\rangle\\ &= \langle z^* - x^*, z^* - x^*\rangle - \nu\langle\overline{w}^* - w^*, z^* - x^*\rangle\\ &\le \|z^* - x^*\|^2 - \nu\|\overline{w}^- w^*\|\|z^* - x^*\|\\ &\le \|z^* - x^*\|^2 - \nu\alpha\|z^* - x^*\|\|z^* - x^*\|\\ &= (1 - \nu\alpha)\|z^* - x^*\|\\ &\le 0\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.52), ta có

$$\limsup_{k\to\infty}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle = \langle\xi^* - \rho F(x^*), z^* - x^*\rangle \le 0. \tag{2.53}$$

Chú ý rằng

$$\{\beta_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1), \left\{\frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2}\right\} \subset [0, 1], \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(1-\beta_k)(\tau-\delta)}{2} = \infty,$$

và

$$\limsup_{k\to\infty}\left[\frac{4}{\tau-\delta}\langle(\xi^k)^* - \rho F(x^*), z^k - x^*\rangle + \frac{4\mathcal{M}_0}{\tau-\delta}.\frac{\sigma_k}{\alpha_k}\|x^k - x^{k-1}\| + \frac{4\mathcal{M}_0^2}{\tau-\delta}.\frac{\theta_k}{\alpha_k}\right] = 0. \tag{2.54}$$

Áp dụng Bổ đề 1.8, chúng ta thu được $\lim_{k\to\infty}\|x^k - z^*\| = 0$, hay $x^k \to z^* \in \Omega$.

Như vậy, từ các Khẳng định 2.4, 2.5 và Khẳng định 2.6, suy ra Định lý 2.3 hoàn toàn được chứng minh. ■

2.3 Một số tính toán minh họa

Trong mục này, chúng tôi áp dụng Thuật toán 2.1 cho lớp bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$, trong đó C là một tập lồi đa diện được cho bởi

$$C = \begin{cases} x \in \mathbb{R}^5_+ \\ x_1 + x_2 \geq 1.5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 12, \end{cases}$$

song hàm $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ được giới thiệu trong [75] có dạng

$$f(x, y) = \langle G(x) + Qy + q, y - x\rangle,$$

với A là ma trận 5×5, B là ma trận phản đối xứng 5×5, D là ma trận đường chéo 5×5 và ma trận $Q = AA^T + B + D$ như trong [9] và q là véc tơ thuộc $\mathbb{R}^5$, Chọn $\eta > 1 + \|Q\|$ và ánh xạ G được cho bởi

$$G(x) = (\eta x_1 + \eta x_2 + \sin(x_1), -\eta x_1 + \eta x_2 + \sin(x_2), (\eta - 1)x_3, (\eta - 1)x_4, (\eta - 1)x_5).$$

Trước hết, chúng ta sẽ chỉ ra G liên tục Lipschitz trên C với hằng số $L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)}$. Thật vậy, dễ dàng thu được

$$\begin{aligned} &\Big|[\eta x_1 + \eta x_2 + \sin(x_1)] - [\eta y_1 + \eta y_2 + \sin(y_1)]\Big| \\ &\qquad\leq \eta|x_1 - y_1| + \eta|x_2 - y_2| + \Big|\sin(x_1) - \sin(y_1)\Big| \\ &\qquad\leq (\eta + 1)|x_1 - y_1| + \eta|x_2 - y_2|. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Một cách tương tự, ta cũng có

$$\Big|[-\eta x_1 + \eta x_2 + \sin(x_2)] - [-\eta y_1 + \eta y_2 + \sin(y_2)]\Big| \leq \eta|x_1 - y_1| + (\eta + 1)|x_2 - y_2|. \tag{2.56}$$

Sử dụng (2.55) và (2.56), ta có

$$
\begin{aligned}
\|G(x)-G(y)\|^2 = &\Big|[\eta x_1+\eta x_2+\sin(x_1)]-[\eta y_1+\eta y_2+\sin(y_1)]\Big|^2\\
&+\Big|[-\eta x_1+\eta x_2+\sin(x_2)]-[-\eta y_1+\eta y_2+\sin(y_2)]\Big|^2\\
&+\Big|(\eta-1)x_3-(\eta-1)y_3\Big|^2+\Big|(\eta-1)x_4-(\eta-1)y_4\Big|^2\\
&+\Big|(\eta-1)x_5-(\eta-1)y_5\Big|^2\\
\le &\Big[(\eta+1)|x_1-y_1|+\eta|x_2-y_2|\Big]^2+\Big[\eta|x_1-y_1|+(\eta+1)|x_2-y_2|\Big]^2\\
&+(\eta-1)^2|x_3-y_3|^2+(\eta-1)^2|x_4-y_4|^2+(\eta-1)^2|x_5-y_5|^2\\
\le &\, 2(2\eta^2+2\eta+1)\|x-y\|^2,
\end{aligned}
$$

trong đó bất đẳng thức cuối có được nhờ áp dụng $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Do đó, G liên tục Lipschitz với hằng số $L := \sqrt{2(2\eta^2+2\eta+1)}$.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ chỉ ra G đơn điệu mạnh với hằng số $(\eta-1)$ trên $\mathbb{R}^5$. Thật vậy, lấy $x=(x_1,...,x_5)^T \in \mathbb{R}^5, y=(y_1,...,y_5)^T \in \mathbb{R}^5$ bất kỳ. Khi đó

$$
\begin{aligned}
&\langle G(x)-G(y), x-y\rangle\\
&= [\eta x_1+\eta x_2+\sin(x_1)-\eta y_1-\eta y_2-\sin(y_1)](x_1-y_1)\\
&\quad+[-\eta x_1+\eta x_2+\sin(x_2)+\eta y_1-\eta y_2-\sin(y_2)](x_2-y_2)\\
&\quad+(\eta-1)(y_3-x_3)^2+(\eta-1)(y_4-x_4)^2+(\eta-1)(y_5-x_5)^2\\
&= \eta(y_1-x_1)^2+[\sin(x_1)-\sin(y_1)](x_1-y_1)\\
&\quad+\eta(y_2-x_2)^2+[\sin(x_2)-\sin(y_2)](x_2-y_2)\\
&\quad+(\eta-1)(y_3-x_3)^2+(\eta-1)(y_4-x_4)^2+(\eta-1)(y_5-x_5)^2\\
&\ge (\eta-1)(y_1-x_1)^2+(\eta-1)(y_2-x_2)^2+(\eta-1)(y_3-x_3)^2\\
&\quad+(\eta-1)(y_4-x_4)^2+(\eta-1)(y_5-x_5)^2\\
&= (\eta-1)\|x-y\|^2,
\end{aligned}
$$

Để ý rằng, trong biến đổi trên chúng tôi sử dụng định lý Lagrange: $[\sin(x_1)-\sin(y_1)](x_1-y_1)=(x_1-y_1)^2\cos(c_1) \ge -(x_1-y_1)^2$ với c_1 thuộc giữa x_1 và y_1, và $[\sin(x_2)-\sin(y_2)](x_2-y_2) \ge -(x_2-y_2)^2$. Như vậy, G là $(\eta-1)$-đơn điệu mạnh trên $\mathbb{R}^5$. Mặt khác, từ Bổ đề 6.1(i) trong [76], song hàm f là đơn điệu mạnh với hằng số $(\eta-1-\|Q\|)$, trong đó $\eta > 1+\|Q\|$.

Song hàm g được cho bởi

$$g(x,y)=\langle D(x)+e, y-x\rangle,$$

trong đó $D(x) = \big(d_1 \arctan(x_1), ..., d_5 \arctan(x_5)\big)^T, d_i (i = 1, ..., 5)$ được chọn bởi $d = (1, 3, 5, 7, 2)^T$ và $e = (4.5, 6, 3, 8, 2)^T$. Song hàm này được đề xuất bởi A. Bnouhachem và các cộng sự trong [30], các tác giả cũng đã chỉ ra tính liên tục và giả đơn điệu của g trên C.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}^5$,

$$\partial_2 g(x, x) = \big\{D(x) + e\big\}, \ \partial_2 f(x, x) = \big\{F(x) + Qx + q\big\}.$$

Khi đó, Thuật toán 2.1 được viết lại là

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ w^k = D(x^k) + e \\ y^k = x^k - \alpha_k w^k \quad \text{với } \alpha_k = \frac{\beta_k}{\max\{\rho_k, \|w^k\|\}} \\ u^k = G(x^k) + Qx^k + q \\ x^{k+1} = Pr_C(y^k - \eta_k u^k). \end{cases}$$

Các ma trận A, B, D và vec tơ q được chọn như sau

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Giá trị riêng nhỏ nhất của Q là 10.2313, chuẩn của Q là 58.9677. Theo trên, G là $\sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)}$-liên tục Lipschitz và $(\eta - 1)$-đơn điệu mạnh, ta có

- $\partial_2 f(x, x) = \{G(x) + Qx + q\}$ đơn điệu mạnh với hằng số $\beta := \eta + 9.2313$;
- $\partial_2 f(x, x)$ liên tục Lipschitz với hằng số $L := \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)} + 58.9677$.

Các tính toán sau được thực hiện bởi Matlab R2013a chạy trên Laptop Intel(R) Core(TM) i3-3110M CPU@2.40GHz 2.40GHz 4Gb RAM. Chúng tôi sử dụng điều kiện dừng $\max\{\|y^k - x^k\|, \|x^{k+1} - x^k\|\} < \epsilon$.

Iteration (k)	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	x_5^k
0	1	1	1	1	0
1	0.0000	2.2316	0.0000	0.7074	1.3537
2	1.5000	0.0000	1.1489	1.1755	0.0000
3	0.0000	5.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.4886	1.0114	0.0000	1.7500	0.0000
5	0.0000	1.5000	1.2924	0.2471	1.7134
6	1.0559	0.4441	0.0000	1.7500	0.0000
7	0.0000	1.9503	0.7028	0.6722	1.0024
8	0.3073	1.1927	0.3952	1.5523	0.0002
9	0.2311	1.2689	0.4435	1.2536	0.5493
10	0.2906	1.2094	0.4603	1.3049	0.4299
11	0.2901	1.2099	0.4614	1.3018	0.4350
12	0.2903	1.2097	0.4618	1.3013	0.4356
13	0.2905	1.2095	0.4619	1.3012	0.4358
14	0.2906	1.2094	0.4620	1.3011	0.4358
15	0.2907	1.2093	0.4621	1.3010	0.4359

Bảng 2.1: Kết quả chạy Thuật toán 2.1 với **Test 1**.

Test 1. Lấy $\eta := 5 + \|Q\| = 63.9677$, $\eta_k := \frac{1}{k+10}$, $\rho_k = 200$, $\beta_k = \frac{1}{7k+1}$, $\xi_k = \tau_k = \epsilon_k = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Chọn điểm xuất phát $x^0 = (1,1,1,1,0)^T$ và $\epsilon = 10^{-3}$. Kết quả chạy số của Thuật toán 2.1 được ghi nhận trong Bảng 2.1.
Thuật toán dừng sau 15 bước lặp và nghiệm xấp xỉ thu được là

$$x^{15} = (0.2907, 1.2093, 0.4621, 1.3010, 0.4359)^T.$$

Test 2. Chọn điểm xuất phát $x^0 = (1,1,1,1,0)^T$ và $\epsilon = 10^{-3}$. Chạy Thuật toán 2.1 với các tham số khác nhau và kết quả được ghi nhận trong Bảng 2.2.

Test Prob.	η_k	β_k	ρ_k	No. Iterations	CPU-Times/sec
1	$\frac{1}{k+10}$	$\frac{1}{7k+1}$	200	15	1.3281
2	$\frac{1}{k+10}$	$\frac{1}{7k+1}$	350	12	0.9688
3	$\frac{1}{k+10}$	$\frac{1}{5k+1}$	450	12	0.9688
4	$\frac{1}{2k+1}$	$\frac{1}{5k+1}$	450	11	0.8906
5	$\frac{1}{2k+1}$	$\frac{1}{7k+1}$	100	28	3.4844
6	$\frac{1}{k+7}$	$\frac{1}{7k+1}$	200	15	1.2031
7	$\frac{1}{k+7}$	$\frac{1}{7k+1}$	200+k	35	3.7031
8	$\frac{1}{3k+15}$	$\frac{1}{k+10}$	300+k	45	5.8438
9	$\frac{1}{3k+1}$	$\frac{1}{9k+10}$	450+2k	11	0.9688

Bảng 2.2: Kết quả chạy Thuật toán 2.1 với **Test 2.**

Test 3. Trong ví dụ này, chúng tôi so sánh tốc độ hội tụ của Thuật toán 2.1 với thuật toán dưới đạo hàm tăng cường SEA (trong [10]). Tham số và dữ liệu của các thuật toán được chọn như sau:

- Thuật toán SEA: $\xi = 58, \eta = \xi - 1 - \|Q\|, \lambda_k = \frac{1}{3c_1+1500k}, \beta_k = \frac{2\eta}{S^2(k^2+1)}$, và điều kiện dừng: $\max\{\|y^k - x^k\|, \|x^{k+1} - y^k\|\} \le \epsilon$. Khi đó, các điều kiện của Định lý 3.7 trong [10] được thỏa mãn.

- Thuật toán 2.1: $\eta := 5 + \|Q\| = 63.9677$, $\eta_k := \frac{1}{k+10}$, $\rho_k = 200$, $\beta_k = \frac{1}{7k+1}$, $\xi_k = \tau_k = \epsilon_k = 0$. Điều kiện dừng: $\|x^{k+1} - x^k\| \le \epsilon$.

- Chọn $\epsilon = 10^{-3}$.

Từ kết quả tính toán số ghi nhận được từ các bảng, chúng ta thấy rằng tốc độ và thời gian xử lý của Thuật toán 2.1 phụ thuộc vào việc chọn các dãy tham số $\{\xi_k\}, \{\beta_k\}$ và λ_k, cũng như chọn điểm xuất phát x^0.

Problems	Starting point	Thuật toán 2.1 Iterations	Thuật toán 2.1 CPU-Times/sec	Thuật toán SEA Iterations	Thuật toán SEA CPU-Times/sec
1	$(0, 2, 0, 1, 1)$	21	1.1250	9	1.2214
2	$(0, 1.5, 0, 2, 0)$	25	2.1094	23	2.9934
3	$(1, 1, 0, 1, 1)$	23	0.6719	16	3.6701
4	$(1, 2, 1, 1, 0)$	21	0.9917	19	1.0841
5	$(1, 2, 0, 1.5, 0)$	28	1.0755	21	1.7362
6	$(2, 0, 1, 1, 0)$	18	1.1956	15	1.1882
7	$(2, 0, 0, 2, 1)$	22	1.2225	29	3.2207
8	$(0, 1.5, 2, 1, 0)$	33	0.8798	26	2.6205
9	$(1, 1, 0, 1, 1)$	27	0.7181	35	3.0037
10	$(0, 1, 2, 1, 1)$	24	0.9904	20	2.0092

Bảng 2.3: Kết quả so sánh giữa Thuật toán 2.1 và thuật toán SEA với các điểm xuất phát khác nhau.

Kết luận Chương 2

Sau đây là một số kết quả chính thu được trong Chương 2 này.

(a) Xây dựng Thuật toán chiếu dưới đạo xấp xỉ cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, f, g)$ trên không gian Hilbert $\mathbb{H}$, với song hàm giá cấp thứ 2 đơn điệu mạnh và song hàm giá cấp thứ 1 giả đơn điệu. Trong Thuật toán của chúng tôi, tại mỗi vòng lặp chỉ cần tính các dưới đạo hàm của song hàm giá theo biến thứ 2 và thực hiện một phép chiếu lên tập ràng buộc C. Dưới các điều kiện thích hợp chúng tôi đã chỉ ra được sự hội tụ mạnh của thuật toán về nghiệm duy nhất của bài toán $BEP(C, g, f)$.

(b) Đề xuất Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật quán tính cho bài toán cân bằng hỗn hợp với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng và các tập điểm bất động của ánh xạ tiệm cận không giãn, ánh xạ giả co chặt. Chứng minh sự hội tụ của dãy lặp về nghiệm của bài thông qua Định lý 2.3.

(c) Áp dụng Thuật toán 2.1 cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao tập điểm bất động của ánh xạ không giãn với tập nghiệm của một bài toán cân bằng. Kết quả hội tụ được chỉ ra trong Định lý 2.2.

(d) Lấy các ví dụ số minh họa cho Thuật toán 2.1 và so sánh kết quả với một số Thuật toán trước đó. Kết quả được ghi nhận trong Bảng 2.1, Bảng 2.2 và Bảng 2.3.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG

Phương pháp đạo hàm tăng cường được đề xuất bởi G.M. Korpelevich [56] cho bài toán tìm điểm yên ngựa, sau đó được áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và giả đơn điệu [39, 71]. Đến năm 2008, T.D. Quốc và các cộng sự [76] đã mở rộng phương pháp này cho bài toán cân bằng $EP(C, g)$. Trong các ví dụ minh họa số của mình các tác giả cũng đã chỉ ra được tính ưu việt của thuật toán đạo hàm tăng cường so với thuật toán điểm gần kề. Sau này thuật toán tiếp tục được cải tiến bởi một số tác giả [7, 10, 58].

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu mở rộng phương pháp đạo hàm tăng cường cho một lớp bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f, \Phi)$ có dạng

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C, g, \Phi) \text{ sao cho } f(\hat{x}, y) \geq 0, \ \forall y \in Sol(C, g, \Phi). \tag{3.1}$$

Trong đó, f, g là các song hàm từ $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = g(x, x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{H}$, $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi và $Sol(C, g, \Phi)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C, g, \Phi)$:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, z) + \Phi(z) - \Phi(x^*) \geq 0, \ \forall z \in C. \tag{3.2}$$

Dễ thấy khi $\Phi \equiv 0$, bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ trở thành bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Khi $f \equiv 0$ và $g \equiv 0$, nó trở thành bài toán $OP(C, \Phi)$.

Trong thuật toán mà chúng tôi đề xuất, tại mỗi bước lặp chúng tôi thực hiện giải ba bài toán tối ưu lồi mạnh. Từ x^k đã biết chúng tôi giải bài toán thứ nhất được nghiệm duy nhất và gán cho y^k. Sau khi có y^k chúng tôi thực hiện giải bài toán thứ hai và gán nghiệm cho z^k. Sau khi có z^k bài toán thứ ba được giải và nghiệm được gán cho x^{k+1}. Chúng tôi sử dụng điều kiện dừng là $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ với $\epsilon > 0$ cho trước. Nội dung chính của Chương 3 được được viết dựa trên kết quả trong công trình [CT2].

3.1 Thuật toán

Thuật giải đạo hàm tăng cường giải bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ với các giả thiết dưới đây.

(C_1) $Sol(C, g, \Phi) \neq \emptyset$;

(C_2) Song hàm g là đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số c_1, c_2 và liên tục yếu theo dãy, tức là: $x^k \rightharpoonup \hat{x}$ và $y^k \rightharpoonup \hat{y} \Longrightarrow g(x^k, y^k) \to g(\hat{x}, \hat{y})$;

(C_3) Hàm Φ chính thường, lồi và nửa liên tục dưới;

(C_4) Song hàm f là η-đơn điệu mạnh và liên tục yếu theo dãy;

(C_5) Tồn tại các ánh xạ $\bar{f}_i : C \times C \to \mathbb{H}$ và $\hat{f}_i : C \to \mathbb{H}$ với mỗi $i \in \{1, ..., m\}$ sao cho $\bar{f}_i(x, y) + \bar{f}_i(y, x) = 0, \|\bar{f}_i(x, y)\| \leq \bar{L}_i \|x - y\|$ và $\|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(y)\| \leq \hat{L}_i \|x - y\|$ với mọi $x, y \in C$ và

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) + \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(x, y), \hat{f}_i(y - z) \right\rangle, \ \forall x, y, z \in C.$$

Chú ý 3.1.

(a) Khi song hàm f thỏa mãn điều kiện (C_5), thì f cũng thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số $c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \bar{L}_i \hat{L}_i$.

(b) Cho ánh xạ $F : C \to C$ liên tục Lipschitz với hằng số L. Khi đó song hàm $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$ cũng thỏa mãn điều kiện (C_5).

(c) Lấy $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n, f$ được cho bởi

$$f(x, y) = \langle G(x) + Ax + b, y - x \rangle + \Phi(y) - \Phi(x),$$

trong đó $G : C \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ L-liên tục Lipschitz, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ và $\Phi : C \to \mathbb{R}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, z) - f(x, z) =& \langle G(x) + Ay + b, y - x \rangle + \langle G(y) + Az + b, z - y \rangle \\ & - \langle G(x) + Az + b, z - x \rangle \\ =& \langle A(y - z), y - x \rangle + \langle G(y) - G(x), z - y \rangle. \end{aligned}$$

Chọn $m = 2, \bar{f}_1(x,y) = y - x, \bar{f}_2(x,y) = G(y) - G(x), \hat{f}_1(x) = Ax,$
$\hat{f}_2(x) = -x, \bar{L}_1 = 1,\ \bar{L}_2 = L,\ \hat{L}_1 = \|A\|$ và $\hat{L}_2 = 1$. Như vậy, f thỏa mãn điều kiện (C_5).

(d) Đặt $S := \sum_{i=1}^{m} \bar{L}_i \hat{L}_i$. Chọn các tham số $\lambda_k (k \geq 0), \beta_k$ sao cho

$$\begin{cases} \{\lambda_k\} \subset (a,b) \subset \left(0, \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\right\}\right), \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda > 0, \\ \beta_k \searrow 0, 2\beta_k\eta - \beta_k^2 S^2 < 1, \\ 0 < \tau < \min\{\eta, S\}, 0 < \beta_k < \min\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{2\eta - 2\tau}{S^2 - \tau^2}, \frac{2\eta}{S^2}\right\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ta có $\delta_k := \sqrt{1 - 2\beta_k\eta + \beta_k^2 S^2} \in (0,1)$. Hơn nữa $\xi = 61, \eta = \xi - 57,9677, S = \sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)} + 58,9677, c_1 = c_2 = 5, \lambda_k = \frac{1}{2c_1 + 1 + k}, \beta_k = \frac{2\eta}{S^2(k^2+2)}$ thỏa mãn (3.3). Thuật toán của chúng tôi được mô tả chi tiết như sau.

Thuật toán 3.1. *(Thuật toán đạo hàm tăng cường)*

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$ gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$\begin{cases} y^k = \text{argmin}\left\{\lambda_k[g(x^k, y) + \Phi(y)] + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\} \\ z^k = \text{argmin}\left\{\lambda_k[g(y^k, z) + \Phi(z)] + \frac{1}{2}\|z - x^k\|^2 : z \in C\right\}. \end{cases}$$

Bước 2. Tính

$$x^{k+1} = \text{argmin}\left\{\beta_k f(z^k, t) + \frac{1}{2}\|t - z^k\|^2 : t \in C\right\}.$$

Bước 3. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại, gán $k := k+1$ và quay về ***Bước 1***.

Nhận xét 3.1. *Trong [68, Thuật toán 3.1], các tác giả đã đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật quán tính để giải bài toán* $BEP(C, g, f, \Phi)$*. So sánh thuật toán này với Thuật toán 3.1, điều khác biệt cơ bản ở đây là:*

- *Hạn chế trên các tham số. Tức là, cách chọn tham số trong hai thuật toán khác nhau;*

- *Hệ số đơn điệu mạnh η của song hàm f trong Thuật toán [68, Thuật toán 3.1] $\eta > 0$ phải thỏa mãn điều kiện $\eta > \max\{c_1, l_1\}$. Trong Thuật toán 3.1; hệ số đơn điệu mạnh $\eta > 0$ bất kỳ. Do vậy, lớp hàm trong hai thuật toán là khác nhau;*

- *Các bước chứng minh sự hội tụ của hai thuật toán này hoàn toàn khác nhau bởi tiếp cận dãy số và tiếp cận song hàm.*

3.2 Sự hội tụ của Thuật toán

Bổ đề 3.1. *Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán $EP(C, g, \Phi)$, nghĩa là ta có $x^k \in Sol(C, g, \Phi)$.*

Chứng minh. Từ giả thiết $y^k = x^k$, suy ra x^k là nghiệm duy nhất của bài toán lồi mạnh sau:

$$\min\left\{\lambda_k g(x^k, y) + \lambda_k \Phi(x) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\right\}.$$

Theo Bổ đề 1.4, suy ra

$$0 \in \lambda_k \partial_2 g(x^k, x^k) + \lambda_k \partial\Phi(x^k) + N_C(x^k).$$

Khi đó, tồn tại $w^k \in \partial_2 g(x^k, x^k)$ và $v^k \in \partial\Phi(x^k)$ sao cho $-\lambda_k w^k - \lambda_k v^k \in N_C(x^k)$. Theo định nghĩa dưới vi phân và nón pháp tuyến ngoài, suy ra với mọi $x \in C$, ta có

$$\begin{aligned}
&\lambda_k\langle w^k + v^k, x - x^k\rangle \geq 0,\\
&g(x^k, x) - g(x^k, x^k) \geq \langle w^k, x - x^k\rangle,\\
&\Phi(x) - \Phi(x^k) \geq \langle v^k, x - x^k\rangle.
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên (vế theo vế) kết hợp với $g(x^k, x^k) = 0$, chúng ta thu được $g(x^k, x) + \Phi(x) - \Phi(x^k) \geq 0$ với mọi $x \in C$. Suy ra $x^k \in Sol(C, g, \Phi)$. ■

Bổ đề 3.2. *Gọi $\bar{x} \in Sol(C, g, \Phi)$. Khi đó,*

$$\|z^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_1)\|y^k - x^k\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_2)\|z^k - x^k\|^2.$$

Chứng minh. Khi $\Phi = 0$, trong [8, Bổ đề 3.1] đã chứng minh. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $\Phi \neq 0$. Từ

$$z^k = \mathrm{argmin}\left\{\lambda_k g(y^k, z) + \lambda_k \Phi(z) + \frac{1}{2}\|z - x^k\|^2 : z \in C\right\},$$

áp dụng Bổ đề 1.4 suy ra tồn tại $u^k \in \partial_2 g(y^k, z^k)$ và $\bar{u}^k \in \partial\Phi(z^k)$ sao cho

$$\lambda_k u^k + \lambda_k \bar{u}^k + z^k - x^k \in -N_C(z^k),$$

hay,

$$\langle \lambda_k u^k + \lambda_k \bar{u}^k + z^k - x^k, x - z^k \rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \tag{3.4}$$

Mặt khác, theo định nghĩa dưới vi phân suy ra với mỗi $x \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \lambda_k[g(y^k, x) - g(y^k, z^k)] \geq& \langle \lambda_k u^k, x - z^k \rangle \\ \lambda_k[\Phi(x) - \Phi(z^k)] \geq& \lambda_k \langle \bar{u}^k, x - z^k \rangle. \end{aligned}$$

cộng hai bất đẳng thức cuối và (3.4), chúng ta thu được

$$\lambda_k[g(y^k, x) - g(y^k, z^k) + \Phi(x) - \Phi(z^k)] + \langle z^k - x^k, x - z^k \rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \tag{3.5}$$

Thay x bởi $\bar{x} \in Sol(C, g, \Phi)$ trong (3.5), ta có

$$\lambda_k[g(y^k, \bar{x}) - g(y^k, z^k) + \Phi(\bar{x}) - \Phi(z^k)] \geq \langle z^k - x^k, z^k - \bar{x} \rangle. \tag{3.6}$$

Do song hàm g thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hàng số c_1, c_2, suy ra $g(y^k, z^k) \geq g(x^k, z^k) - g(x^k, y^k) - c_1\|x^k - y^k\|^2 - c_2\|z^k - y^k\|^2$, hay

$$\lambda_k[g(x^k, y^k) + g(y^k, z^k) - g(x^k, z^k)] \geq -\lambda_k c_1\|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k c_2\|y^k - z^k\|^2. \tag{3.7}$$

Thực hiện một cách tương tự với

$$y^k = \operatorname{argmin}\left\{\lambda_k g(x^k, y) + \lambda_k \Phi(y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\},$$

chúng ta cũng thu được

$$\lambda_k[g(x^k, y) - g(x^k, y^k) + \Phi(y) - \Phi(y^k)] \geq \langle y^k - x^k, y^k - y \rangle, \ \forall y \in C.$$

Thay $y = z^k \in C$, ta có

$$\lambda_k[g(x^k, z^k) - g(x^k, y^k) + \Phi(z^k) - \Phi(y^k)] \geq \langle y^k - x^k, y^k - z^k \rangle. \tag{3.8}$$

Cộng ba bất đẳng thức (3.6), (3.7) và (3.8) (vế theo vế) , ta được

$$\begin{aligned} \lambda_k[g(y^k, \bar{x}) + \Phi(y^k) - \Phi(\bar{x})] \geq& \langle z^k - x^k, z^k - \bar{x} \rangle + \langle y^k - x^k, y^k - z^k \rangle \\ &- \lambda_k c_1\|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k c_2\|y^k - z^k\|^2. \end{aligned}$$

Tiếp theo, áp dụng đẳng thức $2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$ với mọi $x, y \in C$, đồng thời sử dụng $\bar{x} \in Sol(C, g, \Phi), y^k \in C$ và tính đơn điệu của song hàm g, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
0 &\geq 2\lambda_k[-g(\bar{x}, y^k) - \Phi(y^k) + \Phi(\bar{x})] \\
&\geq 2\lambda_k[g(y^k, \bar{x}) - \Phi(y^k) + \Phi(\bar{x})] \\
&\geq 2\langle z^k - x^k, z^k - \bar{x}\rangle + 2\langle y^k - x^k, y^k - z^k\rangle - 2\lambda_k c_1\|x^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k c_2\|y^k - z^k\|^2 \\
&= \|z^k - x^k\|^2 + \|z^k - \bar{x}\|^2 - \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|z^k - x^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2 \\
&\qquad - 2\lambda_k c_1\|x^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k c_2\|y^k - z^k\|^2.
\end{aligned}$$

■

Bổ đề 3.3. *Với mỗi $x \in C$, ta có*

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|z^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - z^k\|^2 + 2\beta_k[f(z^k, x) - f(z^k, x^{k+1})].$$

Chứng minh. Do $x^{k+1} = \text{argmin}\{\beta_k f(z^k, t) + \frac{1}{2}\|t - z^k\|^2 : t \in C\}$, nên tồn tại $w_1^k \in \partial_2 f(z^k, x^{k+1})$ sao cho

$$0 \in \beta_k w^k + x^{k+1} - z^k + N_C(x^{k+1}).$$

Hay

$$\beta_k w^k + x^{k+1} - z^k \in -N_C(x^{k+1}).$$

Từ định nghĩa nón pháp tuyến ngoài và dưới vi phân, suy ra

$$\langle \beta_k w^k + x^{k+1} - z^k, x - x^{k+1}\rangle \geq 0, \ \forall x \in C$$

và

$$\beta_k[f(z^k, x) - f(z^k, x^{k+1})] \geq \langle \beta_k w^k, x - x^{k+1}\rangle, \ \forall x \in C.$$

Cộng hai bất đẳng thức cuối, chúng ta thu được

$$2\beta_k[f(z^k, x) - f(z^k, x^{k+1})] + 2\langle x^{k+1} - z^k, x - x^{k+1}\rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \tag{3.9}$$

Áp dụng đẳng thức $2\langle a, b\rangle = \|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$ với mọi $a, b \in \mathbb{H}$, ta có

$$2\beta_k[f(z^k, x) - f(z^k, x^{k+1})] + \|z^k - x\|^2 - \|x^{k+1} - z^k\|^2 - \|x^{k+1} - x\|^2 \geq 0, \ \forall x \in C.$$

■

Bổ đề 3.4. *Giả sử x^* là một nghiệm của bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$. Khi đó,*

$$\|x^{k+1} - y_*^{k+1}\| \le \delta_k \|z^k - x^*\| \le (1 - \tau\beta_k)\|z^k - x^*\|,$$

trong đó,

$$y_*^{k+1} = \text{argmin}\left\{\beta_k f(x^*, v) + \frac{1}{2}\|v - x^*\|^2 : v \in C\right\},$$
$$S = \sum_{i=1}^{m} \bar{L}_i \hat{L}_i,$$
$$\delta_k = \sqrt{1 - 2\beta_k\eta + \beta_k^2 S^2},$$
$$0 < \tau < \min\{\eta, S\},$$
$$0 < \beta_k < \min\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{2\eta - 2\tau}{S^2 - \tau^2}\right\}.$$

Chứng minh. Ta đặt $y_*^{k+1} = \text{argmin}\left\{\beta_k f(x^*, v) + \frac{1}{2}\|v - x^*\|^2 : v \in C\right\}$. Bằng cách tương tự như trong chứng minh của (3.9), chúng ta cũng thu được

$$\beta_k[f(x^*, x) - f(x^*, y_*^{k+1})] + \langle y_*^{k+1} - x^*, x - y_*^{k+1}\rangle \ge 0, \quad \forall x \in C. \tag{3.10}$$

Thay thế x bởi $y_*^{k+1} \in C$ trong (3.9), x bởi $x^{k+1} \in C$ trong (3.10), ta có

$$\beta_k[f(z^k, y_*^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1})] + \langle x^{k+1} - z^k, y_*^{k+1} - x^{k+1}\rangle \ge 0,$$
$$\beta_k[f(x^*, x^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1})] + \langle y_*^{k+1} - x^*, x^{k+1} - y_*^{k+1}\rangle \ge 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức cuối, và sử dụng đẳng thức $2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$, dẫn đến

$$\begin{aligned}
0 &\le 2\beta_k[f(z^k, y_*^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1}) + f(x^*, x^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1})] \\
&\qquad + 2\langle x^{k+1} - z^k - y_*^{k+1} + x^*, y_*^{k+1} - x^{k+1}\rangle \\
&= 2\beta_k[f(z^k, y_*^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1}) + f(x^*, x^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1})] + \|z^k - x^*\|^2 \\
&\qquad - \|x^{k+1} - z^k - y_*^{k+1} + x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y_*^{k+1}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Theo giả thiết (C_5), ta thu được

$$f(z^k, y_*^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1}) \le f(z^k, x^*) - \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(z^k, x^*), \hat{f}_i(x^* - y_*^{k+1})\right\rangle,$$
$$f(x^*, x^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1}) \le f(x^*, z^k) - \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(x^*, z^k), \hat{f}_i(z^k - x^{k+1})\right\rangle.$$

suy ra

$$
\begin{aligned}
&f(z^k, y_*^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1}) + f(x^*, x^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1}) \\
&\qquad\qquad \le f(z^k, x^*) + f(x^*, z^k) - \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(z^k, x^*), \hat{f}_i(x^* - y_*^{k+1}) \right\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(x^*, z^k), \hat{f}_i(z^k - x^{k+1}) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Cũng từ giả thiết (C_5), tính đơn điệu của song hàm f: $f(x,y)+f(y,x) \le -\eta\|x-y\|^2$ với mọi $x, y \in C$, ta có

$$
\begin{aligned}
&f(z^k, y_*^{k+1}) - f(z^k, x^{k+1}) + f(x^*, x^{k+1}) - f(x^*, y_*^{k+1}) \\
&\quad \le -\eta\|z^k - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(z^k, x^*), \hat{f}_i(z^k - x^{k+1}) - \hat{f}_i(x^* - y_*^{k+1}) \right\rangle \\
&\quad \le -\eta\|z^k - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \|\bar{f}_i(z^k, x^*)\| \|\hat{f}_i(z^k - x^{k+1}) - \hat{f}_i(x^* - y_*^{k+1})\| \\
&\quad \le -\eta\|z^k - x^*\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \bar{L}_i \hat{L}_i \|z^k - x^*\| \|z^k - x^{k+1} - x^* + y_*^{k+1}\| \\
&\quad = -\eta\|z^k - x^*\|^2 + S\|z^k - x^*\| \|z^k - x^{k+1} - x^* + y_*^{k+1}\|. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Kết hợp (3.11) và (3.12), ta thu được

$$
\begin{aligned}
0 &\le (1 - 2\beta_k\eta)\|z^k - x^*\|^2 + 2\beta_k S\|z^k - x^*\| \|z^k - x^{k+1} - x^* + y_*^{k+1}\| \\
&\qquad\qquad - \|x^{k+1} - z^k - y_*^{k+1} + x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y_*^{k+1}\|^2 \\
&= (1 - 2\beta_k\eta)\|z^k - x^*\|^2 - (\|x^{k+1} - z^k - y_*^{k+1} + x^*\| - \beta_k S\|z^k - x^*\|)^2 \\
&\qquad\qquad + \beta_k^2 S^2\|z^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y_*^{k+1}\|^2 \\
&\le (1 - 2\beta_k\eta + \beta_k^2 S^2)\|z^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y_*^{k+1}\|^2.
\end{aligned}
$$

Từ giả thiết

$$
0 < \tau < \min\{\eta, S\},\ 0 < \beta_k < \min\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{2\eta - 2\tau}{S^2 - \tau^2}\right\},
$$

suy ra $0 \le \delta_k = \sqrt{1 - 2\beta_k\eta + \beta_k^2 S^2} < 1 - \tau\beta_k$. ■

Bổ đề 3.5. *Các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{z^k\}$ bị chặn.*

Chứng minh. Theo giả thiết song hàm f đơn điệu mạnh, nên bài toán cân bằng $EP(C,f)$ có nghiệm duy nhất. Ta gọi nghiệm đó là $\hat{x}$. Khi đó, với mỗi $\beta_k > 0$, ta có

$$
\hat{x} = \operatorname{argmin}\left\{\beta_k f(\hat{x}, v) + \frac{1}{2}\|v - \hat{x}\|^2 : v \in C\right\}.
$$

Mặt khác
$$y_*^{k+1} = \text{argmin}\left\{\beta_k f(x^*, v) + \frac{1}{2}\|v - x^*\|^2 : v \in C\right\}.$$
Bằng cách tương tự như trong chứng minh Bổ đề 3.4, chúng ta thu được
$$\|y_*^{k+1} - \hat{x}\| \le \delta_k \|x^* - \hat{x}\| \le \|x^* - \hat{x}\|.$$
Suy ra, dãy $\{y_*^{k+1}\}$ bị chặn. Do f liên tục trên C, nên tồn tại hằng số (phụ thuộc x^*) $\bar{M}(x^*) > 0$ sao cho
$$|f(x^*, y_*^{k+1})| \le \bar{M}(x^*), \ \forall k \ge 0.$$
Thay thế x bởi x^* trong (3.10) và sử dụng $f(x^*, x^*) = 0$, chúng ta thu được
$$-\beta_k f(x^*, y_*^{k+1}) + \langle y_*^{k+1} - x^*, x^* - y_*^{k+1}\rangle \ge 0,$$
và do đó, $\|y_*^{k+1} - x^*\|^2 \le \beta_k \bar{M}(x^*) \le \beta_{k+1}\bar{M}(x^*)$ với mọi $k \ge 0$. Áp dụng Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.4, ta có
$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - y_*^{k+1}\| &\le (1 - \tau\beta_k)\|z^k - x^*\| \\
&\le (1 - \tau\beta_k)\|x^k - x^*\| \\
&\le (1 - \tau\beta_k)\|x^k - y_*^k\| + (1 - \tau\beta_k)\|y_*^k - x^*\| \\
&\le (1 - \tau\beta_k)\|x^k - y_*^k\| + \tau\beta_k \frac{\bar{M}(x^*)}{\tau} \\
&\le \max\left\{\|x^k - y_*^k\|, \frac{\bar{M}(x^*)}{\tau}\right\} \\
&\le ... \\
&\le \max\left\{\|x^1 - y_*^1\|, \frac{\bar{M}(x^*)}{\tau}\right\}.
\end{aligned}$$
Như vậy, $\{x^k\}$ bị chặn. Từ Bổ đề 3.2, kéo theo $\|z^k - \bar{x}\| \le \|x^k - \bar{x}\|$ và $0 \le \|y^k - x^k\|^2 \le \frac{1}{1-2bc_1}(\|x^k - \bar{x}\|^2 - \|z^k - \bar{x}\|^2)$. Do đó, $\{y^k\}$ và $\{z^k\}$ cũng bị chặn. ■

Bổ đề 3.6. *Giả sử dãy con $\{x^{k_i}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ yếu tới $\hat{x}$, $\lim_{i\to\infty} \|y^{k_i} - z^{k_i}\| = 0$ và $\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i+1} - z^{k_i}\| = 0$. Khi đó, $\hat{x} \in Sol(C, g, \Phi)$.*

Chứng minh. Do $\{x^k\} \subset C, x^{k_i} \rightharpoonup \hat{x}$ và C đóng yếu, kéo theo $\hat{x} \in C$.
Từ $\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = \lim_{i\to\infty} \|y^{k_i} - z^{k_i}\| = 0$, suy ra $y^{k_i} \rightharpoonup \hat{x}$ và $z^{k_i} \rightharpoonup \hat{x}$.
Lại có g thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số c_1, c_2, tức là ta có bất đẳng thức:
$$g(x^{k_i}, y^{k_i}) + g(y^{k_i}, z^{k_i}) \ge g(x^{k_i}, z^{k_i}) - c_1\|x^{k_i} - y^{k_i}\|^2 - c_2\|y^{k_i} - z^{k_i}\|^2. \tag{3.13}$$

Nhân (3.13) với $\lambda_{k_i} > 0$ và sử dụng (3.5), chúng ta thu được

$$\lambda_{k_i} g(y^{k_i}, z^{k_i}) \geq \lambda_{k_i} \left[-g(x^{k_i}, y^{k_i}) + g(x^{k_i}, z^{k_i}) \right] - \lambda_{k_i} c_1 \|x^{k_i} - y^{k_i}\|^2 - \lambda_{k_i} c_2 \|y^{k_i} - z^{k_i}\|^2,$$

và

$$\lambda_{k_i} [g(y^{k_i}, x) + \Phi(x) - \Phi(z^{k_i})] \geq \lambda_{k_i} g(y^{k_i}, z^{k_i}) + \langle z^{k_i} - x^{k_i}, z^{k_i} - x \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức cuối, suy ra, với mọi $x \in C$ ta có

$$\begin{aligned} \lambda_{k_i} [g(y^{k_i}, x) + \Phi(x) - \Phi(z^{k_i})] &\geq \lambda_{k_i} g(y^{k_i}, z^{k_i}) + \langle x^{k_i} - z^{k_i}, x - z^{k_i} \rangle \\ &\geq \lambda_{k_i} [g(x^{k_i}, z^{k_i}) - g(x^{k_i}, y^{k_i})] + \langle x^{k_i} - z^{k_i}, x - z^{k_i} \rangle \\ &\quad - c_1 \lambda_{k_i} \|x^{k_i} - y^{k_i}\|^2 - c_2 \lambda_{k_i} \|y^{k_i} - z^{k_i}\|^2. \end{aligned}$$

Lại có $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda > 0$, $\lim\limits_{i \to \infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = \lim\limits_{i \to \infty} \|y^{k_i} - z^{k_i}\| = 0$, $\{z^{k_i}\}$ bị chặn và tính liên tục yếu của g, cho qua giới hạn, chúng ta thu được

$$\lambda [g(\hat{x}, x) + \Phi(x) - \Phi(\hat{x})] \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Do đó, $\hat{x} \in Sol(C, g, \Phi)$. ■

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý hội tụ của Thuật toán 3.1.

Định lý 3.1. *Giả sử rằng các giả thiết $(C_1) - (C_5)$ được thỏa mãn và các tham số thỏa mãn* (3.3)*. Khi đó, các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{z^k\}$ sinh ra từ Thuật toán* 3.1 *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$.*

Chứng minh. Đặt $a_k = \|x^k - x^*\|^2$. Áp dụng các Bổ đề 3.2, 3.3 và 3.5, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|z^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - z^k\|^2 + 2\beta_k [f(z^k, x) - f(z^k, x^{k+1})] \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_1) \|y^k - x^k\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_2) \|z^k - x^k\|^2 \\ &\quad - \|x^{k+1} - z^k\|^2 + 2\beta_k [f(z^k, x^*) - f(z^k, x^{k+1})] \qquad (3.14) \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_1) \|y^k - x^k\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_2) \|z^k - x^k\|^2 \\ &\quad - \|x^{k+1} - z^k\|^2 + 2\beta_k K, \qquad (3.15) \end{aligned}$$

trong đó $K = \sup_k \{f(z^k, x^*) - f(z^k, x^{k+1})\} < +\infty$.

Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k+1} \leq a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A < +\infty$. Từ (3.15) và điều kiện $\{\lambda_k\} \subset (a,b) \subset (0, \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\})$, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k - x^*\|^2 = A, \lim_{k\to\infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k\to\infty} \|z^k - y^k\| = \lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad (3.16)$$

Do $\{z^k\}$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{z^{k_i}\}$ của $\{z^k\}$ hội tụ yếu tới $\bar{z} \in C$ và thỏa mãn đẳng thức

$$\liminf_{k\to\infty} \left[f(x^*, z^k) - f(z^k, x^{k+1})\right] = \lim_{i\to\infty} \left[f(x^*, z^{k_i}) - f(z^{k_i}, x^{k_i+1})\right].$$

Kết hợp với (3.16), ta cũng có $x^{k_i+1} \rightharpoonup \bar{z}, x^{k_i} \rightharpoonup \bar{z}$ và $y^{k_i} \rightharpoonup \bar{z}$. Áp dụng Bổ đề 3.6, suy ra $\bar{z} \in Sol(C, g, \Phi)$ và

$$\liminf_{k\to\infty} \left[f(x^*, z^k) - f(z^k, x^{k+1})\right] = f(x^*, \bar{z}) \geq 0. \quad (3.17)$$

Từ giả thiết f đơn điệu mạnh với hằng số η, ta có

$$\liminf_{k\to\infty} \left[f(x^*, z^k) + f(z^k, x^*)\right] \leq \liminf_{k\to\infty} (-\eta\|z^k - x^*\|^2) = -\eta A. \quad (3.18)$$

Kết hợp (3.16), (3.17) và (3.18), chúng ta thu được

$$\liminf_{k\to\infty} \left[f(z^k, x^*) - f(z^k, x^{k+1})\right] \leq -\eta A.$$

Tiếp theo, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng $A = 0$.
Thật vậy, giả sử $A > 0$. Khi đó, tồn tại số nguyên dương $k_0 > 0$ sao cho

$$f(z^k, x^*) - f(z^k, x^{k+1}) \leq -\frac{\eta A}{2}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (3.19)$$

Thay $x = x^*$ trong Bổ đề 3.3 và áp dụng Bổ đề 3.2, với mọi $k \geq k_0$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|z^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - z^k\|^2 + 2\beta_k[f(z^k, x^*) - f(z^k, x^{k+1})] \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \beta_k \eta A.\end{aligned}$$

Tức là, với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$a_k - a_{k_0} \leq -\eta A \sum_{j=k_0}^{k} \beta_j. \quad (3.20)$$

Mà $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=+\infty$, kết hợp với (3.20), chúng ta suy ra được $\liminf_{k\to\infty} a_k=-\infty$, điều này mâu thuẫn với tính bị chặn của $\{a_k\}$. Như vậy, ta có $A=0$, hay $\lim_{k\to\infty} a_k=0$, tức là $\{x^k\}$ hội tụ về nghiệm duy nhất $x^*\in\Omega$ của bài toán $BEP(C,g,f,\Phi)$.

Trường hợp 2. Không tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k+1}\le a_k$ với mọi $k\ge k_0$. Nói các khác, tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $a_{k_0}\le a_{k_0+1}$. Theo Bổ đề 1.3 [60], Maingé đề xuất dãy con $\{a_{\tau(k)}\}$ của $\{a_k\}$ được xác định như sau

$$\tau(k)=\max\left\{i\in\mathbb{N}: k_0\le i\le k, a_i\le a_{i+1}\right\}.$$

Khi đó,

$$\tau(k)\nearrow+\infty, 0\le a_k\le a_{\tau(k)+1}, a_{\tau(k)}\le a_{\tau(k)+1},\quad \forall k\ge k_0. \tag{3.21}$$

Từ tính không giảm của $\{a_{\tau(k)}\}$ và Bổ đề 3.5, dẫn đến tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)}=M<+\infty$. Từ (3.15) và $\lim_{k\to\infty}\beta_k=0$, suy ra

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{\tau(k)+1}-z^{\tau(k)}\|=\lim_{k\to\infty}\|x^{\tau(k)}-y^{\tau(k)}\|=\lim_{k\to\infty}\|y^{\tau(k)}-z^{\tau(k)}\|=0. \tag{3.22}$$

Lại có $\{z^k\}$ bị chặn, bởi vậy tồn tại dãy con của nó hội tụ yếu về $\bar{x}$. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $z^{\tau(k)}\rightharpoonup\bar{x}$. Khi đó, $x^{\tau(k)+1}\rightharpoonup\bar{x}$. Thay k bởi $\tau(k)$ trong (3.14) và kết hợp điều kiện (3.3) chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
&2\beta_{\tau(k)}[f(z^{\tau(k)},x^{\tau(k)+1})-f(z^{\tau(k)},x^*)] \\
&\quad\le a_{\tau(k)}-a_{\tau(k)+1}-\|x^{\tau(k)+1}-z^{\tau(k)}\|^2 \\
&\qquad\qquad -(1-2\lambda_{\tau(k)}c_1)\|y^{\tau(k)}-x^{\tau(k)}\|^2-(1-2\lambda_{\tau(k)}c_2)\|z^{\tau(k)}-x^{\tau(k)}\|^2 \\
&\quad\le 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Suy ra

$$f(z^{\tau(k)},x^{\tau(k)+1})-f(z^{\tau(k)},x^*)\le 0. \tag{3.24}$$

Từ tính đơn điệu mạnh của f với hằng số η trên C, ta có

$$\eta\|z^{\tau(k)}-x^*\|^2\le -f(z^{\tau(k)},x^*)-f(x^*,z^{\tau(k)}). \tag{3.25}$$

Kết hợp (3.24), (3.25), giả thiết (C_4) và Bổ đề 3.6: $\bar{x}\in Sol(C,g,\Phi)$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\eta\limsup_{k\to\infty}\|z^{\tau(k)}-x^*\|^2 &\le \limsup_{k\to\infty}\left[-f(z^{\tau(k)},x^{\tau(k)+1})-f(x^*,z^{\tau(k)})\right] \\
&= -f(\bar{x},\bar{x})-f(x^*,\bar{x}) \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

Như vậy, $\limsup_{k\to\infty} \|z^{\tau(k)} - x^*\| = 0$. Mặt khác, từ (3.22) dẫn đến

$$0 \le \lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)+1} = \lim_{k\to\infty} \|x^{\tau(k)+1} - x^*\| \le \lim_{k\to\infty} \Big[\|x^{\tau(k)+1} - z^{\tau(k)}\| + \|z^{\tau(k)} - x^*\|\Big] = 0,$$

Từ đó, suy ra $\lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)} = 0$. Mà theo (3.21) ta có $0 \le a_k \le a_{\tau(k)+1} \to 0$ khi $k \to \infty$. Vậy định lý được chứng minh. ■

3.3 Ứng dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot

Ta có, nếu $\|y^k - x^k\| = 0$ thì $x^k \in Sol(C, g, \Phi)$. Xét $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ và song hàm $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, được giới thiệu lần đầu trong [75], có dạng

$$f(x, y) = \langle F(x) + Qy + q, y - x\rangle, \tag{3.26}$$

trong đó, A là ma trận $n \times n$, B là ma trận phản đối xứng $n \times n$, D là ma trận đường chéo $n \times n$ và ma trận $Q = AA^T + B + D$ được cho trong [9] và q là một vec tơ trong $\mathbb{R}^n$, $\xi > 1 + \|Q\|$. Ánh xạ F được cho bởi

$$F(x) = (\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_1), -\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_2), (\xi - 1)x_3, ..., (\xi - 1)x_n).$$

Các ma trận $P, \bar{P}$ được chọn sao cho $\bar{P}$ đối xứng, nửa xác định dương và $\bar{P} - P$ nửa xác định âm. Song hàm giá thứ hai g và tập chấp nhận được C được cho bởi

$$g(x, y) = \left\langle Px + \bar{P}y + p, y - x\right\rangle, C = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \le x_i \le 1, \quad \forall i = 1, ..., n\}. \tag{3.27}$$

Chọn hàm lồi $\Phi(x) = \langle Ex, x\rangle + \langle b, x\rangle$, trong đó $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận nửa xác định dương và $b \in \mathbb{R}^n$. Ánh xạ F và các song hàm f, g có các tính chất sau:

- Trong [75], các tác giả đã chỉ ra song hàm g đơn điệu và liên tục, với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x, \cdot)$ lồi và khả dưới vi phân trên $\mathbb{R}^n$, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\|P - \bar{P}\|$.
- F liên tục Lipschitz trên $\mathbb{R}^n$ với hằng số $\sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)}$, đơn điệu mạnh với hằng số $(\xi - 1)$ (trong [14]). Điều này suy ra hằng số đơn điệu mạnh của f là $\xi - 1 - \|Q\|$.

Bây giờ, chúng tôi sẽ chỉ ra f thỏa mãn điều kiện (C_5). Thật vậy, từ (3.26) suy ra

$$\begin{aligned}&f(x, y) + f(y, z) - f(x, z)\\&\quad= \left\langle F(x) + Qy + q, y - x\right\rangle + \left\langle F(y) + Qz + q, z - y\right\rangle - \left\langle F(x) + Qz + q, z - x\right\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle F(y) - F(x), z - y \rangle + \langle x - y, Q(z - y) \rangle$$
$$= \left\langle \bar{f}_1(x, y), \hat{f}_1(y - z) \right\rangle + \left\langle \bar{f}_2(x, y), \hat{f}_2(y - z) \right\rangle,$$

trong đó,

$$\bar{f}_1(x, y) = F(y) - F(x), \bar{f}_2(x, y) = x - y, \hat{f}_1(y - z) = z - y, \hat{f}_2(y - z) = Q(z - y).$$

Khi đó, $\bar{f}_i(x, y) + \bar{f}_i(y, x) = 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\bar{L}_1 = \sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)}$, $\bar{L}_2 = 1$, $\hat{L}_1 = 1$, $\hat{L}_2 = \|Q\|$ và $S = \sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)} + \|Q\|$.

Các tính toán sau được thực hiện bởi Matlab R2014b chạy trên Laptop Intel(R) Core(TM) i5-3110M CPU@2.40GHz 2.40GHz 4Gb RAM.

Ví dụ 3.2. Xét trong $\mathbb{R}^5$. Tập ràng buộc C, các song hàm f và g được cho theo (3.26)-(3.27), trong đó I là ma trận đơn vị, $P = 2\bar{P} + I$, các ma trận $A, B, D, \bar{P}$ và véc tơ q, b được chọn một cách ngẫu nhiên

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5.5 \end{pmatrix}, P = 2\bar{P} + I, p = \begin{pmatrix} 7 \\ 1.5 \\ 2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Giá trị riêng nhỏ nhất của Q là 10.2313, chuẩn của Q là 58.9677. Chúng tôi chạy Thuật toán 3.1 với $\epsilon = 10^{-3}$, các tham số $\xi = 61, \eta = \xi - 1 - \|Q\|$, $\forall k \geq 0$. Kết quả tính toán được thể hiện trong Bảng 3.1

Test Prob.	ξ	β_k	λ_k	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	56	$\frac{2\eta}{S^2(k^2+2)}$	$\frac{1}{2c_1+1+k}$	4	0.8281
2	56	$\frac{2\eta}{S^2(k^2+2)}$	$\frac{1}{2c_1+1+10k}$	5	1.2813
3	59	$\frac{2\eta}{S^2(2k^2+2)}$	$\frac{1}{2c_1+3k}$	6	1.4291
4	61	$\frac{2\eta}{S^2(2k^2+20)}$	$\frac{1}{2c_1+100+k}$	14	2.8125
5	75	$\frac{2\eta}{S^2(k^2+100)}$	$\frac{1}{2c_1+150+3k}$	20	3.7813
6	80	$\frac{2\eta}{S^2(k^2+133)}$	$\frac{1}{2c_1+200+k}$	23	4.4219
7	55	$\frac{2\eta}{S^2(k^2+150)}$	$\frac{1}{2c_1+100+k}$	15	2.6875

Bảng 3.1: Thuật toán 3.1 với điểm xuất phát $x^0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ và các tham số khác nhau.

Test Prob.	Start. point	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	(0,0,0,0,0)	26	3.7500
2	(1,0,0,0,0)	13	2.6406
3	(0,0,0,0,1)	8	1.7656
4	(1,0,0,0,1)	13	2.8594
5	(0,1,1,1,0)	15	3.1719
6	(0.8,1,1,1,0)	14	2.6250
7	(0.8,0.5,0,1,0)	11	1.7813

Bảng 3.2: Thuật toán 3.1 với các điểm xuất phát khác nhau, với tham số $\lambda_k = \frac{1}{2c_1+200}, \beta_k = \frac{2\eta}{S^2(k^2+150)}$.

Ví dụ 3.3. Xét bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$, trong đó $\Phi = 0$, tập ràng buộc C và các song hàm giá f, g được cho bởi (3.26)-(3.27). Trong ví dụ này, chúng tôi so sánh Thuật toán 2.1 với Thuật toán ESA (trong [18]). Với mỗi A, B, P, q và p được tạo ra một cách ngẫu nhiên với giá trị thuộc $(-3, 3)$, chọn $\xi = 58$, Ma trận đường chéo D được tạo ra ngẫu nhiên từ $(0, 1)$, $P = 3\bar{P} + I$ trong đó I là ma trận đơn vị. Các hàm được sử dụng trong Matlab:

$$\begin{cases} A = 6 * rand(k, k) - 3; B = skewdec(k, 1), D = diag(1 : k); \\ Q = A * transpose(A) + B + D; \bar{P} = symdec(k, 1); I = eye(k); P = 3 * \bar{P} + I. \end{cases}$$

Kết quả so sánh được ghi nhận trong Bảng 3.1.

Tham số và dữ liệu trong mỗi thuật toán được chọn như sau:

– Thuật toán 3.1: $\eta = \xi - 1 - \|Q\|, \lambda_k = \frac{1}{3c_1+150+k}, \beta_k = \frac{2\eta}{S^2(2k^2+15)}$, và điều kiện dừng $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$;

– Thuật toán ESA: $\eta := 5 + \|Q\|, \xi_k := \frac{1}{k^2+10}, \lambda_k = 200, \beta_k = \frac{1}{7k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Khi đó, $u^k \in \partial_2 f(y^k, y^k) = \{F(y^k) + Qy^k + q\}, w^k \in \partial_2 g(x^k, x^k) = \{(P + \bar{P})x^k + p\}$, và điều kiện dừng $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Trong cả hai thuật toán, chúng ta đều sử dụng điểm xuất phát giống nhau là $x^0 = (1, 1, ..., 1)$ nhưng ta chọn số chiều n khác nhau. Kết quả so sánh được thể hiện trong Bảng 3.3. Chúng ta thấy rằng trong ví dụ này số vòng lặp và thời gian tính toán của Thuật toán ESA lớn hơn so với Thuật toán chúng tôi đề xuất.

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi áp dụng phương pháp đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f, \Phi)$ với miền ràng buộc cân bằng hỗn hợp. Các kết quả chính thu được như sau:

(a) Đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ trên không gian Hilbert $\mathbb{H}$, tại mỗi bước lặp của thuật toán, chúng tôi chỉ cần giải ba bài toán tối ưu lồi mạnh.

(b) Chứng minh sự hội tụ của dãy lặp sinh ra bởi Thuật toán 3.1 về nghiệm duy nhất của bài toán $BEP(C, g, f\Phi)$ dưới các điều kiện thích hợp.

Problem	Dim. No.	Thuật toán 3.1		Thuật toán ESA	
		No. Iter.	CPU-Times/sec	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	$k = 5$	27	4.7500	14	1.4688
2	$k = 5$	46	7.7656	12	1.3906
3	$k = 10$	64	12.2813	148	20.2969
4	$k = 10$	52	9.6875	36	3.7969
5	$k = 15$	75	15.2031	76	9.1875
6	$k = 15$	70	14.3125	113	17.2188
7	$k = 20$	80	17.5938	360	56.4844
8	$k = 20$	76	16.8125	281	43.9688
9	$k = 25$	79	19.1094	126	20.3281
10	$k = 25$	78	18.9063	409	54.6601

Bảng 3.3: Kết quả so sánh của các Thuật toán 3.1 và Thuật toán ESA với $\epsilon = 10^{-3}$.

(c) Ứng dụng thuật toán cho mô hình cân bằng kinh tế Nash - Cournot và so sánh kết quả với một số thuật toán trước đó.

Chương 4

NGUYÊN LÝ BÀI TOÁN PHỤ DC

Nguyên lý bài toán phụ được đề xuất lần đầu tiên bởi Cohen [36] cho bài toán tối ưu. Sau đó, tác giả [37] mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân và nó đã trở thành một công cụ hữu hiệu cho việc phân tích, phát triển các thuật giải cho các bài toán tối ưu nói chung và bài toán bất đẳng thức biến phân nói riêng [15, 16, 36, 37, 39, 49, 81]. Gần đây, G. Mastroeni [63] đã sử dụng nguyên lý này cho bài toán cân bằng đơn điệu mạnh:

$$\begin{cases} x^0 \in C, k = 0; \\ x^{k+1} = \text{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases}$$

Tuy nhiên, các dãy lặp trong thuật toán này có thể không hội tụ, khi ánh xạ giá đơn điệu hoặc giả đơn điệu. Để khắc phục điều này, T.Đ. Quốc và cộng sự [75] mở rộng phương pháp đạo hàm tăng cường của G.M. Korpelevich [54] giải bài toán cân bằng đơn điệu. Dãy lặp có dạng sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, k = 0 \\ y^k = \text{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\} \\ x^{k+1} = \text{argmin}\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases}$$

Tại mỗi bước lặp, thuật toán giải hai bài tối ưu lồi mạnh.

Trong chương này, với việc kết hợp nguyên lý bài toán phụ nói trên với kỹ thuật phân tích DC cho việc tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Chúng tôi giới thiệu phương pháp nguyên lý bài toán phụ DC, giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên bài báo [CT3] trong danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

4.1 Nguyên lý bài toán phụ DC

Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm giá thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$, và G là một toán tử từ C vào $\mathbb{R}^n$. Bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathrm{Sol}(C,G) \text{ sao cho } f(x^*, x) \geq 0,\ \forall x \in \mathrm{Sol}(C,G), \tag{4.1}$$

trong đó,

$$\mathrm{Sol}(C,G) := \left\{x \in C : \langle G(x), y - x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C\right\}, \tag{4.2}$$

với $G : C \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ affine cho bởi $G(x) = Qx + q$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, với ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và các véc tơ $q \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. Khi $q = 0$, trong [44], các tác giả đã chỉ ra rằng ma trận Q là ma trận giả đơn điệu trên C tương đương với G là giả đơn điệu trên C.

Xét bài toán quy hoạch toàn phương sau đây

$$\min\left\{f_0(x) := \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle : x \in C\right\}, \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.1. Một phần tử $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một điểm KKT (Karush-Kuhn-Tucker point) của bài toán (4.3) nếu và chỉ nếu tồn tại véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$Q\bar{x} + q - A^\top\lambda = 0,\ A\bar{x} \geq b,\ \lambda \geq 0,\ (A\bar{x} - b)^\top\lambda = 0. \tag{4.4}$$

Nghiệm của của bài toán bất đẳng thức biến phân Affine $VI(C,G)$ có liên quan mật thiết với điểm KKT của bài toán quy hoạch toàn phương thông qua bổ đề sau.

Bổ đề 4.1. [45, tr. 834] *Một phần tử $\hat{x} \in C$ là nghiệm của bài toán $VI(G,C)$ nếu và chỉ nếu nó là điểm KKT của bài toán* (4.3).

Mặt khác bài toán (4.3) lại có thể phân tích như sau

$$\begin{aligned}&\min\left\{f_0(x) := \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle : x \in C\right\}\\ &= \min\left\{g(x) - h(x) : x \in \mathbb{R}^k\right\},\end{aligned}$$

trong đó,

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle(\rho I + Q)x, x\rangle + \langle q, x\rangle + \delta_C(x);$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\rho\|x\|^2, \rho > 0 \text{ với } \rho \geq -\tau_1(Q).$$

Do đó, chúng ta có thể sử dụng kỹ thuật phân tích DC vào tìm nghiệm cho Bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Đó cũng là cơ sở để chúng tôi xây dựng thuật toán sử dụng nguyên lý bài toán phụ DC cho bài toán (4.1). Thuật toán chúng tôi đề xuất với một số giả thiết đặt ra như sau:

(D_1) Ánh xạ G giả đơn điệu, song hàm f là đơn điệu mạnh với hằng số $\beta > 0$;

(D_2) Song hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz ([64]) với hằng số $\kappa := \sum_{i=1}^r L_i K_i$, trong đó $\kappa > \beta$, nghĩa là, tồn tại các hằng số $L_i > 0$ và $K_i > 0$, các ánh xạ $\bar{\alpha}_i : C \times C \to C$ và $\hat{\alpha}_i : C \to C$ sao cho, với mọi $x, y, z \in C$, $i \in \{1, \ldots, r\}$,

$$\begin{aligned}
&f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) + \sum_{i=1}^r \langle \bar{\alpha}_i(x, y), \hat{\alpha}_i(y - z)\rangle, \\
&\bar{\alpha}_i(x, y) + \bar{\alpha}_i(y, x) = 0, \quad \|\bar{\alpha}_i(x, y)\| \leq L_i\|x - y\|, \\
&\|\hat{\alpha}_i(x) - \hat{\alpha}_i(y)\| \leq K_i\|x - y\|;
\end{aligned}$$

(D_3) Hàm $f(x, \cdot)$ lồi với mỗi $x \in C$. Mọi dãy $\{y^k\} \subset C$ thỏa mãn $y^k \to d$, ta có $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{|f(d, y^k)|}{\|y^k - d\|} < +\infty$;

(D_4) Chọn các tham số thỏa mãn

$$\eta > \max\left\{-6\tau_1(Q), \nu, \frac{\kappa^2\|Q\|}{\beta^2}, \frac{-2\tau_1(Q)(\beta^2 + \kappa^2)}{\beta^2}\right\}, \tag{4.5}$$

$$0 < \tau < \min\{\beta, \sqrt{2}\kappa\}, \quad 0 < \alpha_k < \frac{2(\beta - \tau)}{2\kappa^2 - \tau^2}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \tag{4.7}$$

$$Q + \eta I \text{ là ma trận xác định dương .} \tag{4.8}$$

Cho ma trân

$$Q = \begin{pmatrix}
9 & 1 & -2 & 0 & \ldots & 0 & -10 \\
1 & -5 & 7 & 0 & \ldots & 0 & -7 \\
-2 & 7 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 6 & 3 \\
-10 & -7 & 0 & 0 & \ldots & 3 & -9
\end{pmatrix}_{n\times n},$$

với $n = 10$, ta có các tham số $\kappa = 3,9226, \beta = 0,1409, \eta = 210, \alpha_k = \frac{1}{2k+30}$ thỏa mãn các điều kiện (D_4).

Thuật toán của chúng tôi đề xuất được mô tả như sau:

Thuật toán 4.1. *(Thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC)*

Khởi tạo. Lấy điểm $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$, gán $k := 0$

Bước 1. Tính

$$y^k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C\right\}. \tag{4.9}$$

Bước 2. Tính

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}\left\{\alpha_k f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C\right\}. \tag{4.10}$$

Bước 3. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k + 1$ và quay trở lại ***Bước 1***.

Chú ý 4.1. (4.9) có thể được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
y^k =& \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C\right\}\\
=& \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\big(\|x\|^2 - 2\langle x^k, x\rangle + \|x^k\|^2\big) : x \in C\right\}\\
=& \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\big\langle (Q + \eta I)x, x\big\rangle + \langle q, x\rangle - \eta\langle x^k, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x^k\|^2 : x \in C\right\}\\
=& \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\big\langle (Q + \eta I)x, x\big\rangle + \langle q, x\rangle + \delta_C(x) - \Big[\eta\langle x^k, x - x^k\rangle + \frac{\eta}{2}\|x^k\|^2\Big]\right\}\\
=& \operatorname{argmin}\Big\{g(x) - \big[\langle w^k, x - x^k\rangle + h(x^k)\big]\Big\},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

trong đó $w^k \in \partial h(x^k)$, $g(x) = \frac{1}{2}\langle (Q + \eta I)x, x\rangle + \langle x, q\rangle + \delta_C(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}\eta\|x\|^2$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đơn vị, $\eta \neq 0$ và $\eta \geq -\tau_1(Q)$.

Dễ thấy, (4.11) chính là thuật toán DC trong [5] cho bài toán

$$\min_C\{l(x) := g(x) - h(x)\}.$$

Đây cũng chính là lý do mà thuật toán chúng tôi đề xuất trên được gọi là kỹ thuật bài toán phụ DC.

4.2 Định lý hội tụ

Trong mục này chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh định lý hội tụ của Thuật toán 4.1 về nghiệm của bài toán (4.1) dưới những giả thiết thích hợp.

Định lý 4.1. *Giả sử các điều kiện từ* (D_1) *đến* (D_4) *được thỏa mãn. Khi đó, các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *sinh ra từ Thuật toán* 4.1 *hội tụ tới nghiệm duy nhất của bài toán* (4.1).

Chứng minh. Định lý được chứng minh thông qua các khẳng định sau.

Khẳng định 4.1. Gọi x^* là nghiệm của bài toán (4.1). Khi đó,

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

Thật vậy, với mỗi $\eta > -2\tau_1(Q) \geq 0$, từ y^k là nghiệm duy nhất của bài toán lồi mạnh (4.9), theo điều kiện cần và đủ cho điểm tối ưu của bài toán quy hoạch lồi [79, Định lý 27.4], ta có

$$-Qy^k - q - \eta y^k + \eta x^k \in N_C(y^k).$$

Theo định nghĩa của nón pháp tuyến ngoài, suy ra y^k thỏa mãn bất đẳng thức

$$\langle Qy^k + q + \eta y^k - \eta x^k, x - y^k\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{4.12}$$

Do x^* là nghiệm duy nhất của bài toán (4.1), suy ra $\langle Qx^* + q, y - x^*\rangle \geq 0$ với mọi $y \in C$, G đơn điệu trên C, lại có $y^k \in C$, nên ta có $\langle Qy^k + q, y^k - x^*\rangle \geq 0$. Thay thế x bởi $x^* \in C$ trong (4.12), chúng ta thu được

$$\eta\langle y^k - x^k, y^k - x^*\rangle \leq \langle Qy^k + q, x^* - y^k\rangle \leq 0.$$

Kết hợp điều này và đẳng thức

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\big(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2\big), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n,$$

dẫn đến

$$\eta\langle y^k - x^k, y^k - x^*\rangle = \frac{\eta}{2}\left(\|y^k - x^k\|^2 + \|y^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2\right) \leq 0.$$

Theo giả thiết $\eta > 0$, suy ra

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

Vậy Khẳng định 4.1 được chứng minh.

Khẳng định 4.2. Với x^* là nghiệm của bài toán (4.1), ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^k - y^k\|^2,$$

và

$$\langle x^{k+1} - y^k, x^{k+1} - x\rangle \leq \alpha_k \left[f(y^k, x) - f(y^k, x^{k+1})\right], \ \forall x \in C. \tag{4.13}$$

Thật vậy, từ x^* là nghiệm duy nhất của bài toán (4.1), nên ta có các bất đẳng thức

$$f(x^*, x) \geq 0, \ \forall x \in \mathrm{Sol}(C, G) \text{ và } \langle Qx^* + q, y - x^*\rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{4.14}$$

Do $y^k \in C$ và $x^* \in \mathrm{Sol}(C, G)$, suy ra $\langle Qx^* + q, y^k - x^*\rangle \geq 0$. Thay x bởi $x^* \in C$ trong (4.12), chúng ta thu được

$$\begin{aligned}\langle Qy^k + q + \eta y^k - \eta x^k, x^* - y^k\rangle &= \langle Q(y^k - x^*), x^* - y^k\rangle \\ &+ \langle Qx^* + q, x^* - y^k\rangle + \eta\langle y^k - x^k, x^* - y^k\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (4.14), ta có

$$\langle (Q + \eta I)(y^k - x^*), x^* - y^k\rangle + \eta\|y^k - x^*\|^2 + \eta\langle y^k - x^k, x^* - y^k\rangle \geq 0. \tag{4.15}$$

Từ giả thiết (D_4), ta có $(Q + \eta I)$ là ma trận xác định dương , nghĩa là, $\langle (Q + \eta I)x, x\rangle \geq \lambda\|x\|^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Dễ thấy $\lambda = \eta + \tau_1(Q)$.
Áp dụng đẳng thức

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\left(\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right), \ \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \tag{4.16}$$

cho $a := y^k - x^k, b := x^* - y^k$ trong (4.15), ta thu được

$$2(\eta - \lambda)\|y^k - x^*\|^2 + \eta\left(\|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 - \|y^k - x^*\|^2\right) \geq 0.$$

Do đó, kết hợp với $\lambda = \eta + \tau_1(Q)$, ta có

$$\begin{aligned}\|y^k - x^*\|^2 &\leq \frac{\eta}{2\lambda - \eta}\|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{2\lambda - \eta}\|x^k - y^k\|^2 \\ &= \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^k - y^k\|^2.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Áp dụng Định lý 27.4 trong [79], chúng ta thấy rằng x^{k+1} là nghiệm của bài toán quy hoạch lồi (4.10) khi và chỉ khi

$$0 \in \partial\left[\alpha_k f(y^k, \cdot) + \frac{1}{2}\|\cdot - y^k\|^2 + \delta_C(\cdot)\right](x^{k+1}),$$

trong đó δ_C là hàm chỉ của tập C. Khi đó, tồn tại $w^k \in \partial f(y^k, \cdot)(x^{k+1})$ và $v^k \in N_C(x^{k+1})$ sao cho

$$0 = \alpha_k w^k + x^{k+1} - y^k + v^k. \tag{4.18}$$

Theo định nghĩa của nón pháp tuyến N_C, suy ra

$$\langle v^k, x - x^{k+1} \rangle \le 0, \quad \forall x \in C.$$

Kết hợp điều này với (4.18), ta thu được

$$\langle y^k - \alpha_k w^k - x^{k+1}, x - x^{k+1} \rangle \le 0, \quad \forall x \in C.$$

Từ $w^k \in \partial f(y^k, \cdot)(x^{k+1})$, ta có

$$\alpha_k[f(y^k, x) - f(y^k, x^{k+1})] \ge \alpha_k \langle w^k, x - x^{k+1} \rangle \ge \langle y^k - x^{k+1}, x - x^{k+1} \rangle. \tag{4.19}$$

Từ đó, chúng ta thu được

$$\langle x^{k+1} - y^k, x^{k+1} - x \rangle \le \alpha_k \left[f(y^k, x) - f(y^k, x^{k+1}) \right].$$

Khẳng định 4.2 được chứng minh.

Khẳng định 4.3. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, chúng ta định nghĩa ánh xạ $S_k : C \to C$ như sau

$$S_k(x) := \text{argmin} \left\{ \alpha_k f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 : y \in C \right\}, \ \forall x \in C.$$

Khi đó, S_k là ánh xạ co, nghĩa là ta có

$$\|S_k(x) - S_k(y)\| \le \Lambda_k \|x - y\|, \ \forall x, y \in C,$$

trong đó $\Lambda_k = \sqrt{1 - \alpha_k(2\beta - \alpha_k \kappa^2)} < 1 - \tau\alpha_k$.

Thật vậy, từ f thỏa mãn điều kiện liên tục kiểu Lipschitz, suy ra

$$\begin{aligned}
&f\big(y, S_k(y)\big) + f\big(S_k(y), x\big) \\
&\quad \ge f(y, x) + \sum_{i=1}^{r} \big\langle \bar{\alpha}_i(y, S(y)), \hat{\alpha}_i(S_k(y) - x) \big\rangle \\
&\quad \ge f(y, x) - \sum_{i=1}^{r} \big| \big\langle \bar{\alpha}_i(y, S_k(y)), \hat{\alpha}_i(S_k(y) - x) \big\rangle \big| \\
&\quad \ge f(y, x) - \sum_{i=1}^{r} \big\| \bar{\alpha}_i(y, S_k(y)) \big\| \, \big\| \hat{\alpha}_i(S_k(y) - x) \big\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq f(y,x) - \sum_{i=1}^{r} L_i K_i \left\|y - S_k(y)\right\| \left\|S_k(y) - x\right\| \\
&\geq f(y,x) - \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} L_i K_i\right) \left\|y - S_k(y)\right\|^2 - \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} L_i K_i\right) \left\|S_k(y) - x\right\|^2 \\
&= f(y,x) - \frac{\kappa}{2}\left\|y - S_k(y)\right\|^2 - \frac{\kappa}{2}\left\|S_k(y) - x\right\|^2,
\end{aligned}
$$

trong đó $\kappa := \sum_{i=1}^{r} L_i K_i$. Sử dụng tính đơn điệu mạnh của song hàm f, chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
&f(y,x) - f(y, S_k(y)) \\
&\quad \leq f(S_k(y), x) + \frac{\kappa}{2}\|y - S_k(y)\|^2 + \frac{\kappa}{2}\|S_k(y) - x\|^2 \\
&\quad \leq -f(x, S_k(y)) - \beta\|S_k(y) - x\|^2 + \frac{\kappa}{2}\|y - S_k(y)\|^2 + \frac{\kappa}{2}\|S_k(y) - x\|^2.
\end{aligned}
$$

Bằng cách kết hợp điều này với (4.13) và sử dụng đẳng thức (4.16), chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
&\|S_k(y) - x\|^2 + \|S_k(y) - y\|^2 - \|y - x\|^2 \\
&\qquad = 2\langle S_k(y) - y, S_k(y) - x\rangle \\
&\qquad \leq 2\alpha_k\left[-f(x, S_k(y)) + \kappa\|y - S_k(y)\|^2 + (\kappa - \beta)\|S_k(y) - x\|^2\right].
\end{aligned}
$$

Tương đương với

$$
[1 + 2\alpha_k(\beta - \kappa)]\|S_k(y) - x\|^2 \leq \|y - x\|^2 - (1 - 2\alpha_k\kappa)\|y - S_k(y)\|^2 - 2\alpha_k f(x, S_k(y)). \tag{4.20}
$$

Lý luận tương tự trong (4.13), ta có

$$
\langle S_k(y) - y, S_k(y) - S_k(x)\rangle \leq \alpha_k\left[f(y, S_k(x)) - f(y, S_k(y))\right],
$$

và

$$
\langle S_k(x) - x, S_k(x) - S_k(y)\rangle \leq \alpha_k\left[f(x, S_k(y)) - f(x, S_k(x))\right].
$$

Cộng hai bất đẳng thức cuối (vế theo vế), chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
\langle S_k(y) - y - S_k(x) + x, S_k(y) - S_k(x)\rangle \leq \alpha_k [&f(y, S_k(x)) - f(y, S_k(y)) \\
&+ f(x, S_k(y)) - f(x, S_k(x))].
\end{aligned}
$$

Do đó,

$$
\|S_k(y) - S_k(x)\|^2 \leq \langle y - x, S_k(y) - S_k(x)\rangle + \alpha_k\left[f(y, S_k(x)) - f(y, S_k(y))\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad + f(x, S_k(y)) - f(x, S_k(x))] \\
&= \frac{1}{2}\left(\|y-x\|^2 + \|S_k(y) - S_k(x)\|^2 - \|y - x - S_k(y) + S_k(x)\|^2\right) \\
&\quad + \alpha_k\left[f(y, S_k(x)) - f(y, S_k(y)) + f(x, S_k(y)) - f(x, S_k(x))\right].
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Do f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, nên ta có

$$f(y, S_k(y)) - f(x, S_k(y)) \geq -f(x,y) + \sum_{i=1}^{r}\langle \bar{\alpha}_i(x,y), \hat{\alpha}_i(y - S_k(y))\rangle,$$

và

$$f(x, S_k(x)) - f(y, S_k(x)) \geq -f(y,x) + \sum_{i=1}^{r}\langle \bar{\alpha}_i(y,x), \hat{\alpha}_i(x - S_k(x))\rangle.$$

Sử dụng tính $\beta-$đơn điệu mạnh của f và cộng hai bất đẳng thức cuối với nhau, chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
&f(y, S_k(y)) - f(x, S_k(y)) + f(x, S_k(x)) - f(y, S_k(x)) \\
&\quad \geq -f(x,y) - f(y,x) + \sum_{i=1}^{r}\langle \bar{\alpha}_i(x,y), [\hat{\alpha}_i(y - S_k(y)) - \hat{\alpha}_i(x - S_k(x))]\rangle \\
&\quad \geq \beta\|y-x\|^2 - \sum_{i=1}^{r}\|\bar{\alpha}_i(x,y)\|\|\hat{\alpha}_i(y - S_k(y)) - \hat{\alpha}_i(x - S_k(x))\| \\
&\quad \geq \beta\|y-x\|^2 - \sum_{i=1}^{r} L_i K_i\|y-x\|\|y - S_k(y) - x + S_k(x)\| \\
&\quad = \beta\|y-x\|^2 - \kappa\|y-x\|\|y - S_k(y) - x + S_k(x)\|.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Bằng cách kết hợp (4.21) và (4.22), ta có

$$
\begin{aligned}
\|y-x\|^2 &\geq \|S_k(y) - S_k(x)\|^2 + \|S_k(y) - S_k(x) - y + x\|^2 \\
&\qquad + 2\alpha_k\left(\beta\|y-x\|^2 - \kappa\|y-x\|\|y - S_k(y) - x + S_k(x)\|\right) \\
&\geq \|S_k(y) - S_k(x)\|^2 + (\|y - S_k(y) - x + S_k(x)\| - \alpha_k\kappa\|y-x\|)^2 \\
&\qquad + \alpha_k(2\beta - \alpha_k\kappa^2)\|y-x\|^2 \\
&\geq \|S_k(y) - S_k(x)\|^2 + \alpha_k(2\beta - \alpha_k\kappa^2)\|y-x\|^2.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra,

$$\|S_k(y) - S_k(x)\|^2 \leq [1 - \alpha_k(2\beta - \alpha_k\kappa^2)]\|y-x\|^2$$

và do đó

$$\|S_k(y) - S_k(x)\| \leq \Lambda_k \|y - x\| \leq (1 - \tau\alpha_k)\|y - x\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Bất đẳng thức cuối được suy ra từ điều kiện (4.7). Vậy ta có Khẳng định 4.3.

Khẳng định 4.4. Tồn tại số thực (phụ thuộc vào x^*) $\bar{M}(x^*) > 0$ và số tự nhiên dương k_0 sao cho

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\alpha_k)\left[\|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2\right] + \frac{\alpha_k}{\tau}\bar{M}(x^*)^2,\ \forall k \geq k_0.$$

Thật vậy, áp dụng Bổ đề 1.5 cho các dữ liệu sau:

$$\begin{aligned}
&X := C,\ Y := C,\ G(x) := C,\ \forall x \in C,\\
&y := \alpha_k,\ W(x, y) := -\alpha_k f(x^*, x) - \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2,
\end{aligned}$$

chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
M(\alpha_k) &= \operatorname{argmax}\{W(x, \alpha_k) : x \in C\}\\
&= \operatorname{argmin}\left\{\alpha_k f(x^*, x) + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 : x \in C\right\}\\
&= \{S_k(x^*)\}.
\end{aligned}$$

Khi đó, M liên tục và $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(x^*) = x^*$. Do f liên tục trên C, bởi vậy $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^*, S_k(x^*)) = f(x^*, x^*) = 0$. Theo giả thiết (D_3), tồn tại hằng số $\bar{M}(x^*) > 0$ và số nguyên dương k_0 sao cho

$$|f(x^*, S_k(x^*))| \leq \bar{M}(x^*)\|S_k(x^*) - x^*\|,\ \forall k \geq k_0.$$

Bằng cách tương tự như (4.13) với $x^{k+1} := S_k(x^*),\ y^k := x^*$ và $x := x^*$, chúng ta cũng thu được

$$-\alpha_k f(x^*, S_k(x^*)) + \langle S_k(x^*) - x^*, x^* - S_k(x^*)\rangle \geq 0, \quad k \geq k_0,$$

trong đó $f(x^*, x^*) = 0$, và do đó

$$\|S_k(x^*) - x^*\|^2 \leq \alpha_k[-f(x^*, S_k(x^*))] \leq \alpha_k\bar{M}(x^*)\|S_k(x^*) - x^*\|, \quad \forall k \geq k_0.$$

Kéo theo

$$\|S_k(x^*) - x^*\| \leq \alpha_k\bar{M}(x^*), \quad \forall k \geq k_0.$$

Tiếp theo, sử dụng tính co của S_k và bất đẳng thức tam giác, với mỗi $k \geq k_0$ ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|S_k(y^k) - x^*\| \\
&= \|S_k(y^k) - S_k(x^*) + [S_k(x^*) - x^*]\| \\
&\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*)\| + \|S_k(x^*) - x^*\| \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k)\|y^k - x^*\| + \alpha_k \bar{M}(x^*). \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với Khẳng định 4.1, dẫn đến

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [(1 - \tau\alpha_k)\|y^k - x^*\| + \alpha_k \bar{M}(x^*)]^2 \\
&= \left[(1 - \tau\alpha_k)\|y^k - x^*\| + \tau\alpha_k \left(\frac{1}{\tau}\bar{M}(x^*)\right)\right]^2 \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k)\|y^k - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{\tau}\bar{M}(x^*)^2 \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k)\left[\|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2\right] + \frac{\alpha_k}{\tau}\bar{M}(x^*)^2.
\end{aligned}$$

Vậy Khẳng định 4.4 được chứng minh.

Khẳng định 4.5. Nếu tồn tại giới hạn $A = \lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$, thì ta có các khẳng định sau :
(4.5a) $\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0$;
(4.5b) Hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về điểm $\bar{x} \in \mathrm{Sol}(C, G)$.

Thật vậy, từ Khẳng định 4.4, suy ra

$$\|y^k - x^k\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{\tau}\bar{M}(x^*)^2.$$

Do $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $A = \lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$, kéo theo

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0.$$

Khẳng định (4.5a) được chứng minh. Mặt khác, từ (4.14), y^k là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá đơn điệu mạnh xác định bởi: $x \longmapsto (Q + \eta I)x + q - \eta x^k$ trong đó I là ánh xạ đơn vị, suy ra y^k cũng là điểm bất động duy nhất của ánh xạ chiếu $P_C\left\{x - \frac{1}{\eta}[(Q + \eta I)x + q - \eta x^k]\right\}$. Dưới các điều kiện $\eta > 0$ và $\eta > -\tau_1(Q)$ với mọi $k \geq 0$, chúng ta có

$$y^k = P_C\left\{y^k - \frac{1}{\eta}\left[(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k\right]\right\}. \qquad (4.24)$$

Từ (4.24), suy ra

$$\begin{aligned}
\|y^{k+1} - y^k\| &= \Big\| P_C \left\{ y^{k+1} - \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^{k+1} + q - \eta x^{k+1} \right] \right\} \\
&\qquad - P_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^k + q - \eta x^k \right] \right\} \Big\| \\
&\le \Big\| y^{k+1} - \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^{k+1} + q - \eta x^{k+1} \right] - y^k \\
&\qquad + \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^k + q - \eta x^k \right] \Big\| \\
&\le \frac{\|Q\|}{\eta} \|y^{k+1} - y^k\| + \|x^{k+1} - x^k\|.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|y^{k+1} - y^k\| \le \frac{\eta}{\eta - \|Q\|} \|x^{k+1} - x^k\|. \tag{4.25}$$

Để ý rằng, từ điều kiện (4.5) và $\kappa > \beta$ của (D_2), suy ra $\eta > \frac{\kappa^2 \|Q\|}{\beta^2} > \|Q\|$. Sử dụng Khẳng định 4.3, $x^k \in C$ và $x^{k+1} = P_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)]$, chúng ta thu được $x^k = P_C(x^k)$ và

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^k\| &= \left\| P_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)] - P_C(x^k) \right\| \\
&\le \left\| y^k - \mu\alpha_k F(y^k) - x^k \right\| \\
&\le \left\| y^k - x^k \right\| + \mu\alpha_k \|F(y^k)\|.
\end{aligned}$$

Cho qua giới hạn với $k \to \infty$, sử dụng tính bị chặn của $\{y^k\}$ và Khẳng định (4.5a), dẫn đến

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Theo (4.25), chúng ta cũng có

$$\lim_{k\to\infty} \|y^{k+1} - y^k\| = 0.$$

Kết hợp (4.24) và tính không giãn của P_C, ta có

$$\begin{aligned}
&\left\| y^k - P_C \left[y^k - \frac{1}{\eta}(Q y^k + q) \right] \right\| \\
&\quad = \left\| P_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^k + q - \eta x^k \right] \right\} - P_C \left[y^k - \frac{1}{\eta}(Q y^k + q) \right] \right\| \\
&\quad \le \left\| y^k - \frac{1}{\eta} \left[(Q + \eta I) y^k + q - \eta x^k \right] - y^k + \frac{1}{\eta}(Q y^k + q) \right\| \\
&\quad = \|y^k - x^k\|.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Từ $\lim_{k\to\infty} \|y^k - x^k\| = 0$ và (4.26), suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \left\| y^k - P_C[y^k - \frac{1}{\eta}(Qy^k + q)] \right\| = 0.$$

Với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại số $k_0 \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$ sao cho

$$\left\| y^k - P_C \left[y^k - \frac{1}{\eta}(Qy^k + q) \right] \right\| \le \epsilon, \ \forall k \ge k_0.$$

Theo Bổ đề 1.6, tồn tại $l > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} d(y^k, \mathrm{Sol}(C,G)) &\le l \left\| y^k - P_C \left[y^k - \frac{1}{\eta}(Qy^k + q) \right] \right\|, \ \forall k \ge k_0 \\ &\le l \|y^k - x^k\| \\ &\to 0 \text{ khi } k \to \infty. \end{aligned}$$

Trong đó bất đẳng thức cuối có được từ (4.26). Do $\mathrm{Sol}(C,G)$ là tập đóng, khác rỗng, nên tồn tại điểm $z^k \in \mathrm{Sol}(C,G)$ sao cho $d(y^k, \mathrm{Sol}(C,G)) = \|y^k - z^k\|$. Điều này dẫn tới $\lim_{k\to\infty} \|y^k - z^k\| = 0$. Sử dụng (4.24), tính không giãn của P_C và

$$y^{k+1} = P_C \left\{ y^{k+1} - \frac{1}{\eta}[(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] \right\},$$

chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z^k\| &\le \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \|y^{k+1} - y^k\| + \|y^k - z^k\| \\ &= \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \Big\| P_C \left\{ y^{k+1} - \frac{1}{\eta}[(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] \right\} \\ &\qquad - P_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta}\left[(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k\right] \right\} \Big\| + \|y^k - z^k\| \\ &\le \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \Big\| y^{k+1} - \frac{1}{\eta}\left[(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}\right] - y^k \\ &\qquad + \frac{1}{\eta}\left[(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k\right] \Big\| + \|y^k - z^k\| \\ &= \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \left\| -\frac{1}{\eta}Q(y^{k+1} - y^k) + (x^{k+1} - x^k) \right\| + \|y^k - z^k\| \\ &\le \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \frac{\|Q\|}{\eta}\|y^{k+1} - y^k\| + \|x^{k+1} - x^k\| + \|y^k - z^k\| \\ &\to 0 \text{ khi } k \to \infty. \end{aligned}$$

Ở đó bất đẳng thức cuối có được từ tính bị chặn của $\{y^k\}$ và $\{x^k\}$, $\lim_{k\to\infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k\to\infty} \|y^k - z^k\| = 0$ và $\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

Do G giả đơn điệu nên tập nghiệm $Sol(C,G)$ chỉ bao gồm một thành phần liên thông chính là $Sol(C,G)$. Kết hợp Bổ đề 1.7 và $\lim\limits_{k\to\infty}\|z^{k+1}-z^k\|=0$, dẫn đến tồn tại số $k_0>0$ và hằng số c sao cho

$$z^k \in \mathrm{Sol}(C,G) \text{ và } f_0(z^k)=c,\ \forall k\geq k_0, \tag{4.27}$$

trong đó hàm số f_0 được cho trong (4.3). Sử dụng $\lim\limits_{k\to\infty}\|y^k-x^k\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|y^k-z^k\|=0$ và (4.27), suy ra tồn tại số thực f_* là cực tiểu của bài toán $\min\{f_0(x): x\in C\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^k)=f_*$. Từ sự hội tụ của $\{x^k\}$, dẫn đến tồn tại $\bar{x}\in\mathrm{Sol}(C,G)$ và $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-\bar{x}\|=0$. Do đó, cả hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ về cùng một điểm $\bar{x}\in\mathrm{Sol}(C,G)$. Như vậy, Khẳng định (4.5b) cũng được chứng minh.

Khẳng định 4.6. Các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về nghiệm x^* của bài toán (4.1).

Thật vậy, ta đặt $a_k=\|x^k-x^*\|^2$ và xét hai trường hợp sau:
Trường hợp 1. Tồn tại $k_0\in\mathbb{N}$ sao cho $a_{k+1}\leq a_k$ với mọi $k\geq k_0$. Trong trường hợp này, giới hạn của dãy $\{\|x^k-x^*\|^2\}$ tồn tại và $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-x^*\|^2=A<\infty$. Theo Khẳng định 4.5, ta có $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-y^k\|=0$, $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về $\bar{x}\in\mathrm{Sol}(C,G)$. Từ tính đơn điệu mạnh của f, ta có $f(x^*,x^{k+1})+\beta\|x^{k+1}-x^*\|^2\leq -f(x^{k+1},x^*)$. Điều này cùng với Khẳng định 4.4 suy ra

$$\lim_{k\to\infty} f(x^*,x^{k+1})=f(x^*,\bar{x})\geq 0$$

và do đó,

$$\lim_{k\to\infty}[-f(x^{k+1},x^*)]\geq \beta A.$$

Mặt khác, từ chứng minh của $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{k+1}-y^k\|=0$, chúng ta thu được

$$\lim_{k\to\infty}[-f(y^k,x^*)]=\lim_{k\to\infty}[-f(y^k,x^*)+f(y^k,x^{k+1})]\geq\beta A.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra $A=0$. Để ý rằng $A\geq 0$. Giả sử rằng ta chỉ có $A>0$. Khi đó, tồn tại $k_1>k_0$ sao cho

$$-f(y^k,x^*)+f(y^k,x^{k+1})\geq\frac{\beta A}{2},\quad \forall k\geq k_1.$$

Với mỗi $k\geq k_1$, từ Khẳng định 4.1 và Khẳng định 4.2 suy ra

$$\beta A\alpha_k\leq 2\alpha_k\left[-f(y^k,x^*)+f(y^k,x^{k+1})\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\le -2\langle x^{k+1} - y^k, x^{k+1} - x^*\rangle \\
&= \|y^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|y^k - x^{k+1}\|^2 \\
&\le \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$\beta A \sum_{i=k_1}^{k} \alpha_i \le \|x^{k_1} - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 < \infty, \quad \forall k \ge k_1.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = +\infty$. Như vậy, chúng ta có $A = 0$. Mà $\lim_{k\to\infty} \|y^k - x^k\| = 0$, nên các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về nghiệm x^* của bài toán (4.1).

Trường hợp 2. Giả sử rằng với mọi số tự nhiên m, tồn tại số tự nhiên k sao cho $k \ge m$ và $a_k < a_{k+1}$. Theo Bổ đề 1.3, tồn tại dãy không giảm $\{\tau(k)\}$ của $\mathbb{N}$ sao cho $\lim_{k\to\infty} \tau(k) = \infty$ và thỏa mãn

$$a_{\tau(k)} \le a_{\tau(k)+1}, \quad a_k \le a_{\tau(k)+1}, \quad \forall k \ge m. \tag{4.28}$$

Theo Khẳng định 4.2 và (4.16), ta có

$$
\begin{aligned}
f(y^k, x^{k+1}) - f(y^k, x^*) &\le \frac{-1}{\alpha_k}\langle x^{k+1} - y^k, x^{k+1} - x^*\rangle \\
&= \frac{1}{2\alpha_k}\Big[\|y^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|y^k - x^{k+1}\|^2\Big].
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Từ tính đơn điệu mạnh của f, suy ra

$$f(y^k, x^*) + f(x^*, y^k) \le -\beta\|y^k - x^*\|^2. \tag{4.30}$$

Cộng (4.29) và (4.30), chúng ta thu được

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\le (1 - 2\alpha_k\beta)\|y^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k\left[f(y^k, x^{k+1}) + f(x^*, y^k)\right] \\
&\le (1 - 2\alpha_k\beta)\|x^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k\left[f(y^k, x^{k+1}) + f(x^*, y^k)\right].
\end{aligned}
$$

Kết hợp điều này với (4.28), ta có

$$
\begin{aligned}
a_{\tau(k)+1} &\le (1 - 2\alpha_{\tau(k)}\beta)\|x^{\tau(k)} - x^*\|^2 - 2\alpha_{\tau(k)}\Big[f(y^{\tau(k)}, x^{\tau(k)+1}) + f(x^*, y^{\tau(k)})\Big] \\
&\le (1 - 2\alpha_{\tau(k)}\beta)a_{\tau(k)+1} - 2\alpha_{\tau(k)}\Big[f(y^{\tau(k)}, x^{\tau(k)+1}) + f(x^*, y^{\tau(k)})\Big],
\end{aligned}
$$

và do đó,

$$a_{\tau(k)+1} \leq \frac{-1}{\beta} \left[f(y^{\tau(k)}, x^{\tau(k)+1}) + f(x^*, y^{\tau(k)}) \right]. \tag{4.31}$$

Từ Khẳng định 4.4, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\alpha_k) \left[\|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 \right] + \frac{\alpha_k}{\tau} \bar{M}(x^*)^2 \\ &\leq (1 - \tau\alpha_k)\|x^k - x^*\|^2 + \tau\alpha_k \frac{\bar{M}(x^*)^2}{\tau^2} \\ &\leq \max\left\{ \|x^k - x^*\|^2, \frac{\bar{M}(x^*)^2}{\tau^2} \right\} \\ &\leq \cdots \\ &\leq \max\left\{ \|x^0 - x^*\|^2, \frac{\bar{M}(x^*)^2}{\tau^2} \right\}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

suy ra dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Do $\{a_{\tau(k)}\}$ không giảm kết hợp với tính bị chặn của $\{x^k\}$ dẫn đến tồn tại giới hạn

$$B = \lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)} < +\infty.$$

Cũng từ Khẳng định 4.4, chúng ta có $\lim_{k\to\infty} \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| = 0$ và $\{y^{\tau(k)}\}$ cũng hội tụ về $\bar{x}$. Theo Khẳng định 4.5, $\lim_{k\to\infty} \|x^{\tau(k)+1} - y^{\tau(k)}\| = 0$, chúng ta cũng có

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{\tau(k)+1} - \bar{x}\| = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{k\to\infty} f(y^{\tau(k)}, x^{\tau(k)+1}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = 0.$$

Cho qua giới hạn trong (4.31) và sử dụng $f(x^*, \bar{x}) \geq 0$, chúng ta thu được $\lim_{k\to\infty} a_{\tau(k)+1} = 0$. Mà $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ (theo (4.28)), suy ra $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
Định lý 4.1 được chứng minh xong. ∎

4.3 Sai số thuật toán

Trong trường hợp f là song hàm và tập C tổng quát, bài toán (4.10) bao gồm nhiều loại bài toán tối ưu cổ điển trong thực tế, chẳng hạn như: Bài toán tối ưu trên tập đồ thị, tối ưu mạng, quy hoạch nón, quy hoạch hình học, quy hoạch lồi đơn điệu, điều khiển dự đoán mô hình ... Hiện này, có nhiều phương pháp tối ưu đã được áp dụng cho bài toán (4.10) như: Phương pháp điểm trong, phương pháp hướng giảm và hướng giảm nhanh, phương pháp giảm có điều kiện, phương pháp tách, phương pháp tọa độ gốc và phương pháp kiểu hướng giảm ngẫu nhiên. Tuy nhiên, việc giải bài toán phụ (4.10) để tìm nghiệm chính xác là một việc không dễ. Chính vì vậy, một số phương pháp xấp xỉ giải bài toán phụ trên với những cải tiến hợp lý đã được đề xuất [6, 29, 46, 54, 82, 92]. Điều kiện dừng cho Thuật toán 4.1 như sau:

$$\left\| y^k - \text{argmin}\left\{ \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}\right\| \leq \epsilon, \tag{4.33}$$

và

$$\left\| x^{k+1} - \text{argmin}\left\{ \alpha f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C \right\}\right\| \leq \epsilon. \tag{4.34}$$

Với mỗi $\chi > 0$, ký hiệu $\chi-$tập nghiệm của bài toán (4.1) là Sol_χ. Khi đó, $\text{Sol}_\chi = \{x^k : \|x^{k+1} - x^k\| \leq \chi\}$. Đặt

$$\begin{cases} \hat{y}^k & = \text{argmin}\left\{ \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \\ \hat{x}^{k+1} & = \text{argmin}\left\{ \alpha f(\hat{y}^k, y) + \frac{1}{2}\|y - \hat{y}^k\|^2 : y \in C \right\}. \end{cases}$$

Mục đích chính của chúng tôi trong mục này là nghiên cứu sự hội tụ của các dãy lặp xấp xỉ (4.33)-(4.34). Giả sử rằng, tồn tại $\sigma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$C \subseteq B(x^*, \sigma), \quad f(C, C) := \{f(x, y) : x, y \in C\} \subseteq B(0, \delta). \tag{4.35}$$

Ta chọn các tham số thỏa mãn điều kiện (4.5) và

$$\begin{cases} 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon}^2 > 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) + \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 \\ \Gamma_\eta := \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + \frac{2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta - 2\tau_1(Q)} - 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) - \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 > 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Để ý rằng $\lim_{\eta \to \infty} \Gamma_\eta = \bar{\epsilon}^2 - 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) - \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 > 0$, bởi vậy, tồn tại tham số $\eta > 0$ sao cho điều kiện (4.36) được thỏa mãn.
Ta có định lý sau:

Định lý 4.2. *Giả sử rằng các điều kiện $(D_1) - (D_2)$, (4.5)-(4.8), (4.35) và (4.36) được thỏa mãn. Cùng với các giả thiết sau*

(i) $\alpha\delta \leq \epsilon^2$,

(ii) *tồn tại số nguyên dương K sao cho $K > \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta}$,*

(iii) *các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được định nghĩa bởi (4.33)-(4.34).*

Khi đó, tồn tại số nguyên $j \in [0, K]$ sao cho

(a) $\|x^j - y^j\| \leq 2\bar{\epsilon}$;

(b) $\|x^i - y^i\| > 2\bar{\epsilon}$ *với mọi* $i = 0, 1, \ldots, j-1$;

(c) $x^j \in \mathrm{Sol}_{\underline{\epsilon}}$, *trong đó* $\underline{\epsilon} := 2\bar{\epsilon} + 3\epsilon$.

Chứng minh. Với mỗi chỉ số $i \geq 0$, ta đặt

$$\bar{x}^{i+1} = \operatorname{argmin}\left\{\alpha f(y^i, y) + \frac{1}{2}\|y - y^i\|^2 : y \in C\right\}.$$

Theo Khẳng định 4.3 trong chứng minh Định lý 4.1, chúng ta có

$$\|\hat{x}^{i+1} - \bar{x}^{i+1}\| \leq \Lambda\|\hat{y}^i - y^i\| \leq \Lambda\epsilon.$$

Kết hợp điều này với (4.34), chúng ta thu được

$$\|x^{i+1} - \hat{x}^{i+1}\| \leq \|x^{i+1} - \bar{x}^{i+1}\| + \|\bar{x}^{i+1} - \hat{x}^{i+1}\| \leq \epsilon(1+\Lambda). \tag{4.37}$$

Bởi (4.35) và f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, ta có

$$\begin{aligned} f(\hat{y}^i, x^*) - f(\hat{y}^i, \hat{x}^{i+1}) &\leq f(\hat{x}^{i+1}, x^*) + \kappa\|\hat{y}^i - \hat{x}^{i+1}\|^2 + \kappa\|\hat{x}^{i+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \delta + \kappa\|\hat{y}^i - \hat{x}^{i+1}\|^2 + \kappa\sigma^2. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Từ (4.16) và (4.13), suy ra

$$\begin{aligned} 2\langle \hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i, \hat{x}^{i+1} - x^*\rangle &= \|\hat{x}^{i+1} - x^*\|^2 + \|\hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i\|^2 - \|\hat{y}^i - x^*\|^2 \\ &\leq 2\alpha\left[f(\hat{y}^i, x^*) - f(\hat{y}^i, \hat{x}^{i+1})\right]. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Như trong (4.17), chúng ta cũng có

$$\|\hat{y}^i - x^*\|^2 \leq \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2.$$

Từ bất đẳng thức trên, (4.39), (4.38) và $x^i \in C \subseteq B(x^*, \sigma)$, ta có

$$\begin{aligned} &\|\hat{x}^{i+1} - x^*\|^2 \\ &\quad\leq \|\hat{y}^i - x^*\|^2 - \|\hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i\|^2 + 2\alpha[f(\hat{y}^i, x^*) - f(\hat{y}^i, \hat{x}^{i+1})] \\ &\quad\leq \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2 - \|\hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i\|^2 \\ &\qquad\qquad + 2\alpha[f(\hat{y}^i, x^*) - f(\hat{y}^i, \hat{x}^{i+1})] \\ &\quad= \|x^i - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2 - \|\hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i\|^2 \\ &\qquad\qquad + 2\alpha[f(\hat{y}^i, x^*) - f(\hat{y}^i, \hat{x}^{i+1})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|x^i - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2 - (1 - 2\alpha\kappa)\|\hat{x}^{i+1} - \hat{y}^i\|^2 \\
&\qquad + 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) \\
&\le \|x^i - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2 + 2\alpha(\delta + \kappa\sigma).
\end{aligned}
$$

Tiếp theo, sử dụng (4.37), ta thu được

$$
\begin{aligned}
\|x^{i+1} - x^*\|^2 &\le \|x^{i+1} - \hat{x}^{i+1}\|^2 + 2\|x^{i+1} - \hat{x}^{i+1}\|\|\hat{x}^{i+1} - x^*\| + \|\hat{x}^{i+1} - x^*\|^2 \\
&\le \epsilon^2(1+\tau)^2 + 2\epsilon(1+\tau)\sigma + \|\hat{x}^{i+1} - x^*\|^2 \\
&\le \|x^i - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)}\|x^i - \hat{y}^i\|^2 \\
&\qquad + 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) + \epsilon^2(1+\Lambda)^2 + 2\epsilon(1+\Lambda)\sigma. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

Bây giờ, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng tồn tại $j \in [0, K]$ sao cho $\|x^j - y^j\| \le 2\bar{\epsilon}$.
Giả sử ngược lại:

$$
\|x^i - y^i\| > 2\bar{\epsilon}, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, K.
$$

Từ (4.36), chúng ta có

$$
\bar{\epsilon} < 2\bar{\epsilon} - \epsilon < \|x^i - y^i\| - \|\hat{y}^i - y^i\| \le \|\hat{y}^i - x^i\|.
$$

Áp dụng (4.40) suy ra

$$
\begin{aligned}
&\|x^{i+1} - x^*\|^2 \\
&\quad \le \|x^i - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) + \epsilon^2(1+\Lambda)^2 + 2\epsilon(1+\Lambda)\sigma \\
&\quad \le \|x^i - x^*\|^2 - \Gamma_\eta. \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Khi $x^i \in C \subseteq B(x^*, \sigma)$, (4.41) dẫn tới

$$
\begin{aligned}
4\sigma^2 &\ge \left(\|x^0 - x^*\| + \|x^K - x^*\|\right)^2 \\
&\ge (\|x^0 - x^*\| + \|x^K - x^*\|)(\|x^0 - x^*\| - \|x^K - x^*\|) \\
&= \|x^0 - x^*\|^2 - \|x^K - x^*\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} \left(\|x^i - x^*\|^2 - \|x^{i+1} - x^*\|^2\right) \ge K\Gamma_\eta.
\end{aligned}
$$

Điều này suy ra rằng $K \le \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta}$, ta thấy mâu thuẩn với giả thiết (ii). Như vậy, tồn tại số nguyên $j \in [0, K]$ sao cho (a) và (b) đúng. Bằng cách lý luận tương tự như trong (4.19), chúng ta cũng có bất đẳng thức sau

$$
\langle \hat{y}^j - \alpha_j \hat{w}^j - \hat{x}^{j+1}, x - \hat{x}^{j+1} \rangle \le 0, \quad \forall x \in C,
$$

trong đó $\hat{w}^j \in \partial f(\hat{y}^j, \cdot)(\hat{x}^{j+1})$. Bằng cách thay $x := \hat{y}^j \in C$, sử dụng $f(\hat{y}^j, \hat{y}^j) = 0$ và định nghĩa của dưới vi phân $\hat{w}^j$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}\|\hat{y}^j - \hat{x}^{j+1}\|^2 \leq \alpha\langle \hat{w}^j, \hat{y}^j - \hat{x}^{j+1}\rangle &\leq \alpha[f(\hat{y}^j, \hat{y}^j) - f(\hat{y}^j, \hat{x}^{j+1})] \\ &= -\alpha f(\hat{y}^j, \hat{x}^{j+1}) \leq \alpha\delta \leq \epsilon^2.\end{aligned}$$

Do (4.33) và kết luận (a), ta có

$$\|\hat{y}^j - x^j\| \leq \|\hat{y}^j - y^j\| + \|y^j - x^j\| \leq \epsilon + 2\bar{\epsilon},$$

và do đó

$$\begin{aligned}\|x^{j+1} - x^j\| &\leq \|\hat{x}^{j+1} - x^j\| + \|\hat{x}^{j+1} - x^{j+1}\| \\ &\leq \|\hat{x}^{j+1} - \hat{y}^j\| + \|\hat{y}^j - x^j\| + \|\hat{x}^{j+1} - x^{j+1}\| \\ &\leq 3\epsilon + 2\bar{\epsilon}.\end{aligned}$$

Như vậy, x^j là một $\underline{\epsilon}-$ nghiệm của bài toán (4.1). Tức là, $x^j \in \mathrm{Sol}_{\underline{\epsilon}}$. ■

4.4 Một số tính toán số minh họa

Ví dụ 4.1. Lấy $\mathbb{H} = l^2 = \{\{x_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Xét song hàm $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x, y) = \langle U(x), y - x\rangle,$$

trong đó U là ánh xạ đồng nhất từ $\mathbb{H}$ vào $\mathbb{H}$. Dễ thấy U là ánh xạ đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên $\mathbb{H}$ (xem [12]). Do đó song hàm f cũng đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz.

Tiếp theo là các ví dụ minh họa số cho Thuật toán 4.1, đồng thời so sánh kết quả với một số thuật toán trước đó. Các tính toán được thực hiện bởi Matlab R2021b chạy trên Laptop Intel(R) Core(TM) i5-3110M CPU@2.40GHz 2.40GHz 4Gb RAM.

Ví dụ 4.2. Chúng tôi xét bài toán (4.1) trong không gian $\mathbb{R}^n$ với $n = 10$, song hàm $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được cho trong [88, Ví dụ 3] như sau:

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle,$$

trong đó,

$$F(x) = (\arctan(x_1), \arctan(x_2), \ldots, \arctan(x_n))^\top + Ex + e,$$

và

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 5 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad e = \begin{pmatrix} 2 - \frac{n}{2} \\ 4 - \frac{n}{2} \\ 6 - \frac{n}{2} \\ \vdots \\ \frac{3n}{2} - 2 \\ \frac{3n}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Theo định lý giá trị trung bình cổ điển và $\nabla \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, dẫn đến tồn tại $c_i \in (x_i, y_i) \subseteq (a(i), b(i))$ sao cho

$$\begin{aligned} \big|\arctan(x_i) - \arctan(y_i)\big| &= \frac{1}{1+c_i^2}|x_i - y_i| \\ &\le \frac{1}{1+\max\{b^2(i) : i = 1, 2, \ldots, n\}}|x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|F(x) - F(y)\| \le L\|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $L := \|E\| + \frac{1}{1+16.7^2} = 3.9226$.
Lại có

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, z) - f(x, z) &= \langle F(x), y - x\rangle + \langle F(y), z - y\rangle - \langle F(x), z - x\rangle \\ &= \langle F(x) - F(y), y - z\rangle \\ &= \langle \bar\alpha(x, y), \hat\alpha(y - z)\rangle, \end{aligned}$$

trong đó $\bar\alpha(x, y) := F(x) - F(y)$ và $\hat\alpha(y - z) := y - z$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, dễ thấy $\bar\alpha(x, y) + \bar\alpha(y, x) = 0$, $\|\bar\alpha(x, y)\| = \|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|$ và $\|\hat\alpha(x) - \hat\alpha(y)\| \le \|x - y\|$. Do đó, f thỏa mãn điều kiện liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số L và $K := 1$.

Gọi $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$ và $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ được cho bởi $G(x) = Qx + q$, trong đó

$$\begin{aligned} a =& (1, 2, 3, 3.7, 4.8, 12.7, 6.9, 8.2, 7, 2)^\top \in \mathbb{R}^n, \\ b =& (5, 7, 11, 7, 5.5, 15, 8.8, 9.0, 10.2, 17)^\top \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

ma trận Q và véc tơ q được chọn một cách ngẫu nhiên như sau:

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & -10 \\ 1 & -5 & 7 & 0 & \dots & 0 & -7 \\ -2 & 7 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3 \\ -10 & -7 & 0 & 0 & \dots & 3 & -9 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad q = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n}{3} \\ \frac{n}{4} \\ \vdots \\ \frac{n}{10} \\ \frac{n}{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, giá trị riêng nhỏ nhất và lớn nhất của Q, E là $\tau_1(Q) = -9.5777$, $\tau_2(Q) = 10.1999$ và $\tau_1(E) = 3.0810$, $\tau_2(E) = 6.9190$, tương ứng. Do $\nabla \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, từ đó dễ dàng suy ra được F là đơn điệu mạnh trên C với hằng số $\beta = 0.0810 + \frac{1}{\max\{b(i): i=1,2,\dots,n\}} = 0.1409$.
Chúng ta lấy $\alpha_k = \frac{1}{2k+30}$, $\eta = 210$. Khi đó, các điều kiện áp lên tham số (4.5) được thỏa mãn. Với độ chính xác $\epsilon = 10^{-3}$, chúng tôi thu được kết quả tính toán trong Hình 4.1 và Bảng 4.1.
Nghiệm xấp xỉ thu được sau 25 bước lặp là:

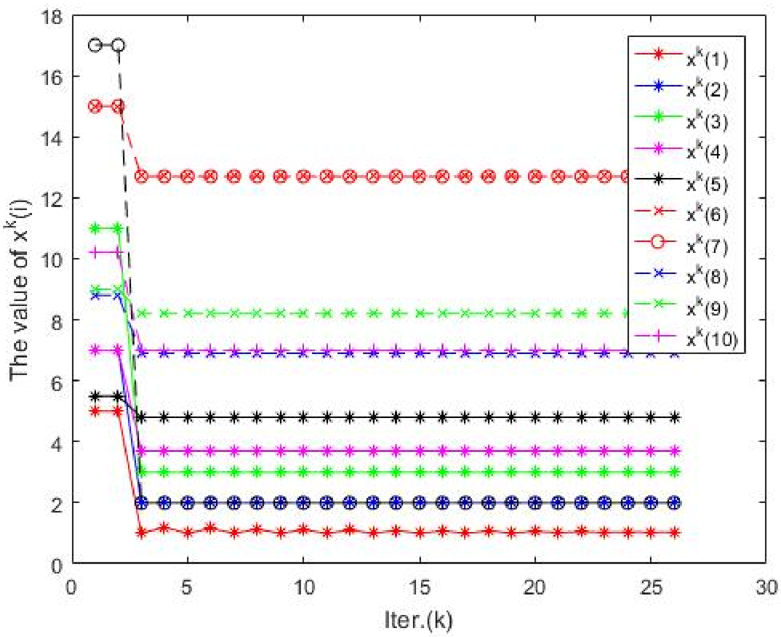
$$x^{25} = (1.0391, 2.0000, 3.0000, 3.7000, 4.8000, 12.7000, 6.9000, 8.2000, 7.0000, 2.0000)^\top.$$

Ví dụ 4.3. Xét song hàm $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ của mô hình cân bằng Nash-Cournot trong [75]

$$f(x, y) = \langle F(x) + Py + p, y - x\rangle, \tag{4.42}$$

trong đó A là ma trận $n \times n$, B là ma trận phản đối xứng $n \times n$, D là ma trận đường chéo $n \times n$, ma trận $P = AA^\top + B + D$ (trong [47]) và p là một véc tơ thuộc $\mathbb{R}^n$.
Chọn $\xi > 1 + \|P\|$ và ánh xạ F được cho bởi

$$F(x) = (\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_1), -\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_2), (\xi - 1)x_3, \dots, (\xi - 1)x_n)^\top.$$



Hình 4.1: Sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ trong Ví dụ 4.2

Lấy $n = 7$, $C = [a, b]$, $a = (0, 0, \dots, 0)^\top$, $b = (1, 2, \dots, n)^\top$, ma trận Q và véctơ q được cho như sau

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+(-1)^n \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad q = \begin{pmatrix} \frac{2n^2+1}{n+2} \\ \frac{2n^2+2}{n+3} \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
&\|F(x) - F(y)\|^2 \\
&= [\xi(x_1 - y_1) + \xi(x_2 - y_2) + (\sin x_1 - \sin y_1)]^2 + \\
&\qquad + [\xi(y_1 - x_1) + \xi(x_2 - y_2) + (\sin x_2 - \sin y_2)]^2 + (\xi - 1)^2 \sum_{i=3}^{n} (x_i - y_i)^2 \\
&\le [(\xi + 1)|x_1 - y_1| + \xi|x_2 - y_2|]^2 + [\xi|x_1 - y_1| + (\xi + 1)|x_2 - y_2|]^2 + \\
&\qquad + (\xi - 1)^2 \sum_{i=3}^{n} (x_i - y_i)^2 \\
&\le (2\xi^2 + 2\xi + 1)(x_1 - y_1)^2 + (2\xi^2 + 2\xi + 1)(x_2 - y_2)^2 + (\xi - 1)^2 \sum_{i=3}^{n} (x_i - y_i)^2
\end{aligned}$$

Test Prob.	η	α_k	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	200	$\frac{1}{k+10}$	25	2.7031
2	200	$\frac{1}{2k+15}$	27	2.9688
3	250	$\frac{1}{3k+10}$	24	2.7031
4	250	$\frac{1}{5k+20}$	29	3.0313
5	350	$\frac{1}{5k+100}$	40	4.4063
6	400	$\frac{1}{9k+10}$	39	3.6563
7	500	$\frac{1}{8k+50}$	55	5.5313
8	600	$\frac{1}{5k+20}$	67	7.3594
9	700	$\frac{1}{k+5}$	60	5.7344
10	750	$\frac{1}{10k+30}$	80	8.2031

Bảng 4.1: Ví dụ 4.2 với các tham số khác nhau.

$$\leq (2\xi^2 + 2\xi + 1)\|x - y\|^2,$$

và do vậy

$$\begin{aligned}
& f(x, y) + f(y, z) - f(x, z) \\
& = \langle F(x) + Py + p, y - x\rangle + \langle F(y) + Pz + p, z - y\rangle - \langle F(x) + Pz + p, z - x\rangle \\
& = \langle F(x) - F(y), y - z\rangle + \langle y - x, P(y - z)\rangle \\
& = \langle \bar{\alpha}_1(x, y), \hat{\alpha}_1(y - z)\rangle + \langle \bar{\alpha}_2(x, y), \hat{\alpha}_2(y - z)\rangle,
\end{aligned}$$

trong đó $\bar{\alpha}_1(x, y) := F(x) - F(y)$, $\hat{\alpha}_1(y - z) := y - z$, $\bar{\alpha}_2(x, y) := y - x$ và $\hat{\alpha}_2(y - z) := P(y - z)$. Đặt

$$L_1 = \sqrt{2\xi^2 + 2\xi + 1},\ L_2 = 1, K_1 = 1,\ K_2 = \|P\|.$$

Khi đó, song hàm f liên tục kiểu Lipschitz với hằng số $\mathcal{M} = L_1K_1 + L_2K_2$ và đơn điệu mạnh với hằng số $\beta = \xi - 1 - \|Q\|$, G đơn điệu trên $\mathbb{R}^n$ với $\tau_1(Q) = 0$ và $\tau_2(Q) = 2$.

Bây giờ, chúng tôi so sánh sự hội tụ của Thuật toán 4.1 với các Thuật toán SPA [17] và SEA [10], trong đó ánh xạ giá G phải yêu cầu tính chất đơn điệu, hay Q là nửa xác định dương. A, B, p được tạo ra ngẫu nhiên từ $(-3, 3)$ và $\xi = 7 + \|Q\|$, D được tạo ra ngẫu nhiên từ $(0, 1)$, Chúng tôi sử dụng các lệnh trong Matlab

Toolbox để tạo như sau:

$$A = 6 * \mathrm{rand}(n, n) - 3, \quad B = \mathrm{skewdec}(n, 1),$$

$$D = \mathrm{diag}(1 : n), \quad \bar{Q} = A * \mathrm{transpose}(A) + B + D.$$

Bên cạnh đó, chúng tôi chọn điểm xuất phát $x^0 = \frac{a+b}{2}$, sai số $\epsilon = 10^{-3}$, các tham số và dữ liệu cho mỗi thuật toán như sau:
Thuật toán 4.1:

- Các tham số: $\eta = 200, \alpha_k = \frac{1}{5k+100}$;

- Điều kiện dừng: $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Thuật toán SEA:

- Dữ liệu: $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}(L_1K_1 + L_2K_2) = \frac{1}{2}(\sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)} + \|Q\|)$, $S = 2c_1$, $g(x, y) = \langle Qx + q, y - x\rangle$ for all $x, y \in \mathbb{R}^n$, $w^k = Qx^k + q$.

- Tham số: $\lambda_k = 0.01 + \frac{1}{k+7}$, $\beta_k = \frac{1}{3k+20}$ và $\mu = 0.011$;

- Điều kiện dừng: $\max\{\|x^{k+1} - y^k\|, \|y^k - x^k\|\} \leq \epsilon$.

Thuật toán SPA:

- Dữ liệu: $g := f$ đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, F đơn điệu và liên tục Lipschitz;

- Tham số: $\lambda_k = \frac{1}{(k+1)^\lambda}$, $\lambda = 0.75$, $\alpha_k = \frac{1}{(k+1)^\alpha}$, $\alpha = \frac{1-\lambda}{2}$ và $\mu = 5$;

- Điều kiện dừng: $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Kết quả so sánh của ba thuật toán được cho trong Bảng 4.2 với 10 dữ liệu ngẫu nhiên khác nhau.

Prob.	Thuật toán 4.1		SPA		SEA	
	No. Iter.	CPU-Times/sec	No. Iter.	CPU-Times/sec	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	21	2.6563	139	7.6406	1302	114.9844
2	23	2.8438	100	5.5313	392	35.9844
3	27	3.3906	179	9.7813	382	37.4688
4	6	0.5938	147	7.9375	309	30.8750
5	28	3.6094	205	11.2344	915	80.7031
6	22	2.7031	127	7.3281	169	16.9375
7	8	0.8281	155	8.1406	337	33.4844
8	22	2.9844	133	7.0469	124	12.7656
9	60	8.8594	284	16.6406	1038	90.4531
10	7	0.7188	306	17.5156	593	54.0625

Bảng 4.2: Kết quả so sánh của Thuật toán 4.1 với (SPA) và (SEA).

Từ kết quả chạy số của hai ví dụ trên, chúng tôi rút ra một số kết luận sau

- Tốc độ hội tụ của Thuật toán 4.1 là khá nhạy với các tham số η và α;
- Thời gian xử lý của CPU và số vòng lặp của thuật toán chúng tôi đề xuất là ít hơn so với các Thuật toán SPA và SEA. Một điểm đáng chú ý nữa trong thuật toán của chúng tôi đề xuất là tại mỗi bước lặp chúng tôi chỉ cần giải một bài toán tối ưu lồi và một bài toán quy hoạch toàn phương, điều này giúp cho việc chạy số dễ dàng hơn.

Kết luận Chương 4

Với sự kết hợp giữa nguyên lý bài toán phụ cho bài toán cân bằng và kỹ thuật phân tích DC cho bài toán bất đẳng thức biến phân affine, trong chương này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân affine. Kết quả cụ thể thu được trong chương này như sau:

(a) Xây dựng thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC cho bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức affine. Dưới các điều kiện phù hợp chúng tôi cũng chỉ ra được sự hội tụ của dãy lặp về nghiệm của bài toán (4.1).

(b) Chúng tôi cũng chỉ ra được rằng các dãy xấp xỉ với độ chính xác ϵ cho trước sinh ra từ thuật toán cũng hội tụ về một điểm thuộc tập χ-nghiệm nào đó thông qua Định lý 4.2.

(c) Lấy các ví dụ minh họa số cho thuật toán chúng tôi đề xuất. Ví dụ thứ nhất cho kết quả nghiệm xấp xỉ sau 25 vòng lặp, ví dụ thứ hai chúng tôi so sánh với các Thuật toán SPA và Thuật toán SEA. Kết quả trong bảng 4.2 cho thấy thuật toán chúng tôi đề xuất hiệu quả hơn về số vòng lặp và thời gian tính toán.

KẾT LUẬN

Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải các lớp bài toán cân bằng hai cấp. Các thuật toán mới được nghiên cứu dưa trên các phương pháp chiếu tổng quát, chiếu dưới đạo hàm, nguyên lý bài toán phụ và các kỹ thuật trong Lý thuyết tối ưu.

1. Những kết quả chính đã đạt được trong luận án:

- Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng đơn điệu mạnh với ràng buộc cân bằng giả đơn điệu (thường được gọi là bài toán cân bằng hai cấp đơn điệu). Thuật toán này được chúng tôi phát triển từ thuật toán chiếu của P. Santos và cộng sự trong [82] cho bài toán cân bằng giả đơn điệu. Ưu điểm của thuật toán chính là sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT1].

- Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật kiểu quán tính cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng giả đơn điệu với tập điểm bất động của các ánh xạ tiệm cận không giãn và giả co chặt. Bằng việc sử dụng kỹ thuật kiểu quán tính các kết quả thử nghiệm số đã chỉ ra rằng tốc độ hội tụ của thuật toán được cải thiện đáng kể. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT4].

- Thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng hỗn hợp. Thuật toán này còn được gọi là thuật toán chiếu hai lần tổng quát được phát triển từ phương pháp đạo hàm tăng cường của G.M. Korpelevich [56] cho bài toán tìm điểm yên ngựa. Tính hữu hiệu của nó đã được chứng minh trong cả lý thuyết lẫn các ví dụ số. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT2].

- Thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC cho bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân affine. Như chúng ta đã biết, kỹ thuật phân tích hiệu hai hàm lồi được sử dụng rất hiệu quả cho bài toán quy hoạch không lồi nói chung và bài toán quy hoạch toàn phương nói riêng. Dựa vào mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân affine và bài toán quy hoạch toàn phương, chúng tôi áp dụng kỹ thuật phân tích DC kết hợp với nguyên lý bài toán phụ và thu được một thuật giải rất hữu hiệu cho bài toán cân bằng hai cấp. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT3].

- Một số tính toán minh họa cho thuật toán đề xuất trên, áp dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot. So sánh kết quả với các thuật toán đã được đề xuất trước đó.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Sau đây là các hướng mà chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sau khi hoàn thành luận án này.

- Cải thiện tốc độ cũng như thời gian tính toán của các thuật toán đã được đề xuất bằng cách kết hợp với một số kỹ thuật như kỹ thuật quán tính, lặp Halpern, lặp Mann, ...

- Nghiên cứu đánh giá tốc độ hội tụ của thuật toán, cách chọn tham số để có được sự hội tụ tốt hơn.

- Nghiên cứu các thuật toán nhằm giảm nhẹ các điều kiện áp lên các song hàm giá, đặc biệt là song hàm giá ở cấp thứ hai cũng như giảm số phép chiếu lên tập ràng buộc C tại mỗi bước lặp của thuật toán.

- Mở rộng nghiên cứu phương pháp giải cho bài toán cân bằng nhiều cấp hơn như ba cấp, bốn cấp, ...

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[**CT1**] P.N. Anh, H.P. Tu (2021), "Subgradient projection methods extended to monotone bilevel equilibrium problems in Hilbert spaces", *Numerical Algorithms* 86, pp. 55-74 (SCIE, Q1).

[**CT2**] P.N. Anh, D.D. Thanh, N.K. Linh, H.P. Tu (2021), "New Explicit Extragradient Methods for Solving a Class of Bilevel Equilibrium Problems", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 44, pp. 3285-3305 (SCIE, Q2).

[**CT3**] P.N. Anh, Q.H. Ansari, H.P. Tu (2023), "DC auxiliary principle methods for solving lexicographic equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 85, pp. 129-153 (SCI, Q1).

[**CT4**] P.N. Anh, H.P. Tu, H.P. Dung (Submitted: 08/11/2022), "Inertial subgradient projection techniques for solving a class of bilevel equilibrium problems", *Optimization*(SCIE, Q1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Phạm Ngọc Anh (2015), *Các phương pháp tối ưu và ứng dụng*, NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội.

[2] Đỗ Văn Lưu, Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[3] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

Tiếng Anh

[4] F. Alvarez, H. Attouch (2001), "An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping", *Set-Valued Analysis* 9, pp. 3–11.

[5] L.T.H. An, P.D. Tao (1997), "Solving a class of linearly constrained indefinite quadratic problems by DC algorithms", *Journal of Global Optimization* 11, pp. 253–285.

[6] L.T.H. An, P.D. Tao, H.V. Ngai (2016), "Error bounds via exact penalization with applications to concave and quadratic systems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 171, pp. 228-250.

[7] P.N. Anh (2013), "A hybrid extragradient method for pseudomonotone equilibrium problems and fixed point problems", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 36, pp. 107-116.

[8] P.N. Anh (2013), "A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems", *Optimization* 62(2), pp. 271-283.

[9] P.N. Anh, L.T.H. An (2013), "An Armijo-type method for pseudomonotone equilibrium problems and its applications", *Journal of Global Optimization* 57, pp. 803-820.

[10] P.N. Anh, L.T.H. An (2019), "New subgradient extragradient methods for solving monotone bilevel equilibrium problems", *Optimization* 68(11), pp. 2097-2122.

[11] P.N. Anh, T.T.H. Anh, T. Kuno (2017), "Convergence theorems for variational inequalities on the solution set of Ky Fan inequalities", *Acta Mathematica Vietnamica* 42(4), pp. 761-773.

[12] P.K. Anh, T.N. Hai (2021), "Dynamical system for solving bilevel variational inequalities", *Journal of Global Optimization* 80(4), pp. 945-963.

[13] P.K. Anh, T.N. Hai, V.T. Dung (2022), "A gradient-like regularized dynamics for monotone equilibrium problems", *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 21, Article number: 160 (http://doi.org/10.1007/s12346-022-00698-4).

[14] P.N. Anh, T.N. Hai, P.M. Tuan (2016), "On ergodic algorithms for equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 64(1), pp. 179-195.

[15] P.N. Anh, L.D. Muu, N.V. Hien, J.J. Strodiot (2005), "On the contraction and nonexpansiveness properties of the marginal mapping", *in: Generalized Convexity and Generalized Monotonicity and Applications. Eds: A. Eberhard, N. Hadjisavvas and D.T. Luc, Springer*, pp. 89-111.

[16] P.N. Anh, L.D. Muu, N.V. Hien, J.J. Strodiot (2005), "Using the banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 124, pp. 285–306.

[17] P.N. Anh, L.Q. Thuy, T.T.H. Anh (2018), "Strong convergence theorem for the lexicographic Ky Fan inequality", *Vietnam Journal of Mathematics* 46(3), pp. 517-530.

[18] P.N. Anh, H.P. Tu (2020), "Subgradient projectionmethods extended tomonotone bilevel equilibriumproblems in Hilbert spaces" *Numerical Algorithms* 86, pp. 55–74.

[19] Q.H. Ansari (2010), *Metric Spaces*, Including Fixed Point Theory and Set-valued Maps, Narosa Publishing House, New Delhi, India.

[20] Q.H. Ansari, A.P. Farajzadeh, S. Schaible (2012), "Existence of solutions of strong vector equilibrium problems", *Taiwanese Journal of Mathematics* 16, pp. 165–178.

[21] Q.H. Ansari, I.V. Konnov, J.C. Yao (2001), "On generalized vector equilibrium problems", *Nonlinear Analysis* 47, pp. 543–554.

[22] J.P. Aubin, I. Ekeland (1984), *Applied nonlinear analysis*, John Wiley & Sons.

[23] A.V. Balakrishnan (1981), *Applied functional alnalysis*, Springer, New York.

[24] H.H. Bauschke, P.L. Combettes (2011), *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York.

[25] G.C. Bento, J.X. Cruz Neto, J.O. Lopes (2016), "Generalized proximal distances for bilevel equilibrium problems", *SIAM Journal of Optimization* 26, pp. 810–830.

[26] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria* , Springer Nature Switzerland AG 2019.

[27] G. Bigi, G. Kassay, A. Capata (2012), "Existence results for strong vector equilibrium problems and their applications", *Optimization* 61, pp. 567–583.

[28] E. Blum, W. Oettli (1994), "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *Math Students* 63, pp. 123-145.

[29] A. Bnouhachem (2007), "An inexact implicit method for general mixed variatioanl inequalities", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 200, pp. 377-387.

[30] A. Bnouhachem (2006), "An LQP method for psedomonotone variational inequalities", *Journal of Global Optimization* 36, pp. 351-363.

[31] S. Carl, V.K. Le (2021), *Multi-Valued Variational Inequalities and Inclusions*, Springer.

[32] L.C. Ceng, M. Shang (2021), "Hybrid inertial subgradient extragradient methods for variational inequalities and fixed point problems involving asymptotically nonexpansive mappings", *Optimization* 70, pp. 715–40.

[33] O. Chadli, Z. Chbani, H. Riahi (2000), "Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions and applications to variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 105, pp. 299–323.

[34] S.S. Chang, Y.J. Cho, H. Zhou (2001), "Demi-closed principle and weak convergence problems for asymptotically nonexpansive mapping", *Journal of The Korean Mathematical Society* 38, pp. 1245-1260.

[35] Z. Chbani, H. Riahi (2015), "Weak and strong convergence of proximal penalization and proximal splitting algorithms for two-level hierarchical Ky Fan minimax inequalities", *Optimization* 64, pp. 1285–1303.

[36] G. Cohen (1980), "Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 32, pp. 277–305.

[37] G. Cohen (1988), "Auxiliary principle extended to variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 59, pp. 325–333.

[38] X.P. Ding (2010), "Auxiliary principle and algorithm for mixed equilibrium problems and bilevel mixed equilibrium problems in Banach spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications* 146, pp. 347–357.

[39] F. Facchinei, J.S. Pang (2003), *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementary Problems*, Springer-Verlag, NewYork.

[40] K. Fan (1972), *A minimax inequality and applications*, in: O. Shisha, Inequality III, Proceeding of the Third Symposium on Inequalities, Academic Press, New York.

[41] F. Giannessi (2000), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria: Mathematical Theories*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[42] A. Gibali, D.V. Hieu (2019), "A new inertial double-projection method for solving variational inequalities", *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 21, pp. 21-97.

[43] K. Goebel, W.A. Kirk (1972), "A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings", *Proceedings of the American Mathematical Society* 35(1), pp. 171 - 175.

[44] M.S. Gowda (1989), "Pseudomonotone and copositive star matrices", *Linear Algebra Applications* 113, pp. 107-118.

[45] M.S. Gowda, J.S. Pang (1994), "Stability analysis of variational inequalities and nonlinear complementarity problems", *Mathematics of Operations Research* 19(4), pp. 831-879.

[46] D. Han (2007), "Inexact operator splitting methods with selfadaptive strategy for variational inequality problems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 132(2), pp. 227-243.

[47] P.T. Harker, J.S. Pang (1990), "A damped-Newton method for the linear complementarity problem", *Lectures in Applied Mathematics* 26, pp. 265-284.

[48] D.V. Hieu, P.K Quy (2023), "One-Step iterative method for bilevel equilibrium problem in Hilbert spac", *Journal of Global Optimization* 85(2), pp. 487–510.

[49] T.T. Hue, J.J Strodiot, V.H. Nguyen (2004), "Convergence of the approximate auxiliary problem method for solving generalized variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 121, pp. 119–145.

[50] H. Iiduka (2012), "Fixed point optimization algorithm and its application to power in CDMA data networks", *Mathematical Programming* 133, pp. 227–242.

[51] A.N. Iusem, W. Sosa (2003) "New existence results for equilibrium problems", *Nonlinear Analysis* 52, pp. 621-635.

[52] C. Jaipranop, S. Saejung (2021), "On iterative methods for bilevel equilibrium problems", *Journal of Inequalities and Applications* 1, pp. 1-18.

[53] G. Kassay, V.D. Radulescu (2019), *Equilibrium Problems and Applications*, Elsevier.

[54] I.V. Konnov (2000), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, New York, Berlin, Springer-Verlag.

[55] I.V. Konnov (2003), "Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 119, pp. 317–333.

[56] G.M. Korpelevich (1976), "Extragradient method for finding saddle points and other problems", *Matecon* 12, pp. 747-756.

[57] G. Li (2022), "Two new weak convergence algorithms for solving bilevel pseudomonotone equilibrium problem in Hilbert space", *Journal of Mathematics* 8, pp. 1-16.

[58] Y. Liu, H. Kong (2019), "The new extragradient method extended to equilibrium problems", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, F´ısicas y Naturales Serie A Matematicas´* 113(3), pp. 2113–2126.

[59] Z.Q. Luo, P. Tseng (1992), "Error bound and convergence analysis of matrix splitting algorithms for the affine variational inequality problem", *SIAM Journal of Optimization* 2, pp. 43-54.

[60] P.E. Maingé (2008), "A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems", *SIAM Journal of Control Optimization* 47, pp. 1499-1515.

[61] P.E. Maingé (2010), "Projected subgradient techniques and viscosity methods for optimization with variational inequality constraints", *European Journal of Operational Research* 205, pp. 501–506.

[62] B. Martinet (1970), "Re´gularisation d'ine´quations variationelles par approximations successives", *Revue Française Automatique Informatique* 4, pp. 154–159.

[63] G. Mastroeni (2000), "On auxiliary principle for equilibrium problems", *Publicatione del Dipartimento di Mathematica dell'Universita di Pisa* 3, pp. 1244–1258.

[64] G. Mastroeni (2003), "Gap functions for equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 27, pp. 411-426.

[65] A. Migdalas, P.M. Pardalos, P. Varbrand (1998), *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*, Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17,3300 AA Dordrecht, The Netherlands.

[66] A. Moudafi (2010), "Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 47, pp. 287–292.

[67] A. Moudafi (1999), "Proximal point algorithm extended to equilibrium problems", *Journal of Natural Geometry* 15, pp. 91-100.

[68] J. Munkong, B.V. Dinh, K. Ungchittrakool (2020), "An inertial extragradient method for solving bilevel equilibrium problems", *Carpathian Journal of Mathematics* 36(1), pp. 91 - 107.

[69] L.D. Muu, W. Oettli (1992), "Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria", *Nonlinear Analysis, Theory Methods Applications* 18, pp. 1159-1166.

[70] H. Nikaido, K. Isoda (1955), "Note on noncooperative convex games", *Pacific Journal of Mathematics*, pp. 807-815.

[71] M.A. Noor (2003), "Extragradient methods for pseudomonotone variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 117, pp. 475–488.

[72] J. Peypouquet (2015), *Convex Optimization in Normed Spaces: Theory, Methods and Examples*, Springer, Berlin.

[73] B. Polyak (1964), "Some methods of speeding up the convergence of iteration methods", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 4(5), pp. 1–17.

[74] X. Qin, L. Wang, J.C. Yao (2020), "Inertial splitting method for maximal monotone mappings", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 1, pp. 2325–33.

[75] T.D. Quoc, P.N. Anh, L.D. Muu (2012), "Dual extragradient algorithms to equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 52, pp. 39-159.

[76] T.D. Quoc, L.D. Muu, V.H. Nguyen (2008), "Extragradient algorithms extended to equilibrium problems", *Optimization* 57 (6), pp. 749-776.

[77] N.V. Quy (2014), "An algorithm for a bilevel problem with equilibrium and fixed point constraints", *Optimization* 64, pp. 1–17.

[78] H. Riahi, Z. Chbani, M.T. Loumi (2018), "Weak and strong convergences of the generalized penalty Forward–Forward and Forward–Backward splitting algorithms for solving bilevel hierarchical pseudomonotone equilibrium problems", *Optimization* 67, pp. 1745-1767.

[79] R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[80] R.T. Rockafellar (1976), "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM Journal of Control Optimization* 14, pp. 877–898.

[81] G. Salmon, V.H. Nguyen , J.J. Strodiot (2000), "Coupling the auxiliary problem principle and the epiconvergence theory to solve generalized variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications* 104, pp. 629–657.

[82] P. Santos, S. Scheimberg (2011), "An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems", *Computational and Applied Mathematics* 30, pp. 91-107.

[83] B. Tan, S. Li (2020), "Strong convergence of inertial mann algorithms for solving hierarchical fixed point problems", *Journal of Nonlinear and Variational Analysis* 4, pp. 337–55.

[84] K.K. Tan, H.K. Xu (1993), "Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 178, pp. 301–308.

[85] L.Q. Thuy, T.N. Hai (2017), "A projected subgradient algorithm for bilevel equilibrium problems and applications", *Journal of Optimization Theory and Applications* 175(2), pp. 411–431.

[86] H. Tuy (1998), *Convex analysis and global optimization*, Kluwer Academic Publishers.

[87] H.K. Xu (2022), "Iterative algorithms for nonlinear operators", *Journal of the London Mathematical Society* 66, pp. 240-256.

[88] M.H. Xu, M. Li, C.C. Yang (2009), "Neural networks for a class of bi-level variational inequalities", *Journal of Global Optimization* 44, pp. 535-552.

[89] I. Yamada (2001), "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings", *Studies in Computational Mathematics* 8, pp. 473-504.

[90] Y. Yao, Y.C. Liou, K.S. Kang (2010), "Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method", *Computers and Mathematics with Applications* 59, pp. 3472-3480.

[91] E. Zeidler (1986), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo.

[92] L.C. Zeng, J.C. Yao (2005), "Convergence analysis of a modified inexact implicit method for general mixed monotone variational inequalities", *Mathematical Methods of Operations Research* 62, pp. 211-224.

[93] H. Zhou (2008), "Convergence theorems of common fixed points for a finite family of Lipschitz pseudocontractions in Banach spaces", *Nonlinear Analysis* 68, pp. 2977-2983.